1.1 Institut für Didaktik der Mathematik und Physik

www.idmp.uni-hannover.de

Professorinnen / Professoren: T. Gawlick (Mathematik), G. Friege (Physik)

1.1.1 Didaktik der Mathematik

Prof. Dr. Thomas Gawlick

Was ist Mathematikdidaktik?

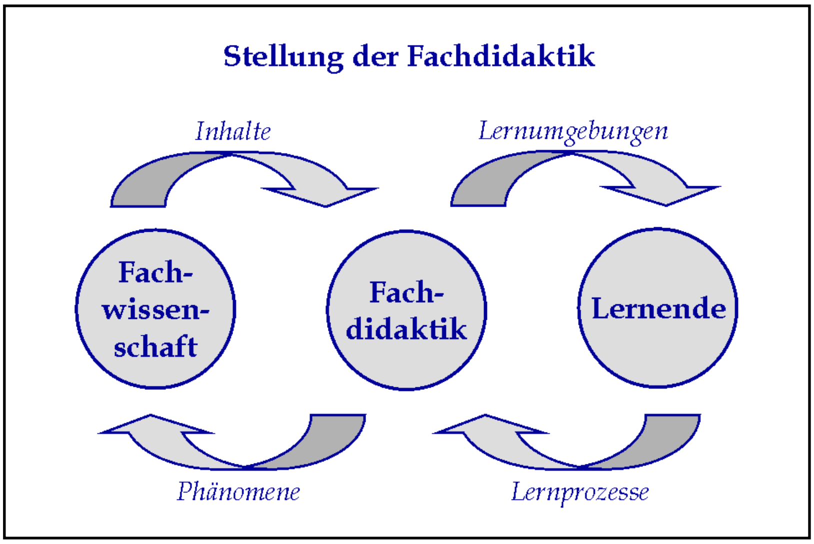
Mathematikdidaktik beschäftigt sich mit dem Lernen und Lehren von Mathematik in allen Altersstufen. Sie sucht Antworten auf Fragen der Art:

- Was können, was sollen SchülerInnnen im Mathematikunterricht lernen?
- Wie könnte oder sollte ein bestimmter mathematischer Inhalt gelehrt, eine bestimmte mathematische Fähigkeit vermittelt werden?
- Welchen Einfluss haben Neigungen Fähigkeiten und affektive Faktoren von SchülerInnnen auf ihre mathematischen Fähigkeiten?

Die Didaktik der Mathematik sucht nach Antworten, indem sie

- mathematische *Inhalte* aufbereitet, mit dem Ziel, sie durch adaptierte *Lernumgebungen* bestimmten Lerngruppen zugänglich zu machen,
- Inhalte und spezielle Lernziele im Rahmen allgemeiner Zielsetzungen des Mathematikunterrichts hinterfragt bzw. rechtfertigt,
- Lernvoraussetzungen und *Lernprozesse* erforscht sowie geeignete empirische Methoden und theoretische Konzepte entwickelt.

Zentrale Bezugswissenschaft der Mathematikdidaktik ist natürlich die Mathematik:



Um ihre Aufgaben zu erfüllen, bedient sich die Mathematikdidaktik aber auch der Ergebnisse und Methoden anderer Wissenschaften wie Erziehungswissenschaft, Psychologie, Soziologie, Philosophie oder Wissenschaftsgeschichte.

Forschungsschwerpunkte der Abteilung

Aktuell widmen wir uns zwei längerfristig angelegten Forschungsprojekten, in denen Studierende im Rahmen ihrer Bachelor- oder Masterarbeit mitarbeiten können:

1. Determinanten des Mathematischen Problemlösens

Im Rahmen einer nationalen Erweiterung zur PISA-Studie wurde festgestellt, dass fächerübergreifendes kooperatives Problemlösen nur mäßig mit Leistungsprädiktoren wie Intelligenz oder Schulnoten oder auch sozialen Kompetenzen korreliert. Wir haben analoge Resultate für das Mathematische Problemlösen erhalten, die wir nun durch Analyse von Aufgabenbearbeitungsprozessen zu verfeinern und zu erklären versuchen. Forschungsgegenstand sind dabei Daten aus dem Projekt MALU:

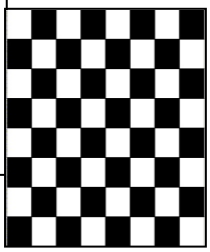
MALU ist die im WS 2008/09 erstmalig durchgeführte **M**athe **A**G an der **L**eibniz **U**niversität Hannover für mathematisch interessierte und verschieden begabte Fünftklässler zur Förderung der Problemlösefähigkeit. Es wurden dazu in allen fünften Klassen an vier hannoveraner Gymnasien je ein allgemeiner und ein mathematischer Begabungstest durchgeführt und daraufhin verschieden mathematisch begabte Kinder angeschrieben und zur Teilnahme an der AG eingeladen. Die Problembearbeitungsprozesse der Fünftklässler-Paare wurden auf Tonband bzw. Video aufgezeichnet.

Im Rahmen der Begleitforschung zum MALU-Projekt werden diese Problemlöseprozesse nun im Hinblick darauf untersucht, welche Zusammenhänge z.B. von Kooperationsverhalten und Heurismengebrauch mit dem Problemlöseerfolg bestehen.

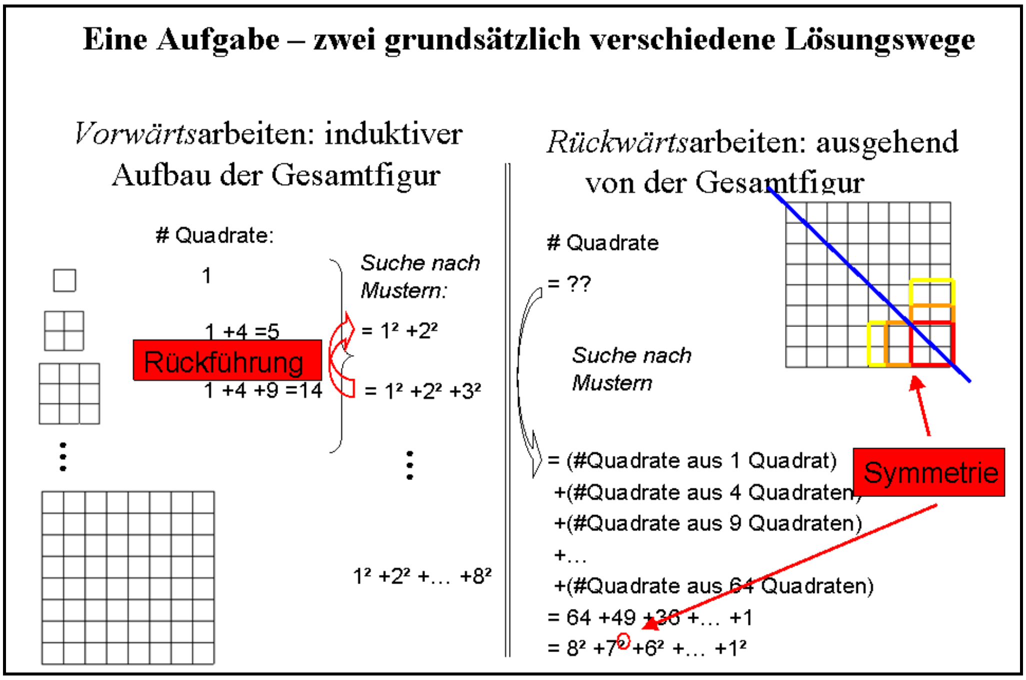
Ach ja, das Schachbrett...

Peter spielt leidenschaftlich gerne Schach. Er spielt so gerne Schach, dass seine Gedanken auch dann um das Spiel kreisen, wenn er gerade gar nicht spielt. Neulich stellte er sich die Frage, wie viele Quadrate wohl auf einem Schachbrett zu finden sind.

Versucht, Peters Frage zu beantworten!



In dieser MALU-Aufgabe können z.B. Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten als heuristische Strategien auftreten – und auf ganz unterschiedlichen Wegen zum Ergebnis führen:



Weitere Informationen zum MALU-Projekt: *www.idmp.uni-hannover.de/malu.html*

2 Kognitiv aktivierender Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software

Der Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) ist die dritte technologische Revolution im Lehren und Lernen von Mathematik (nach dem Siegeszug des Taschenrechners und der zunehmenden Verbreitung von Computeralgebrasystemen). DGS erlangt zunehmend in folgenden drei Bereichen an Bedeutung:

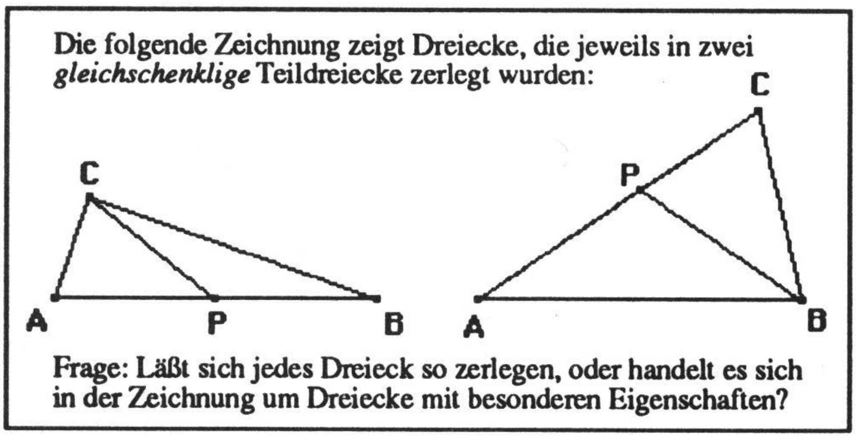
- bei der Vermittlung von Wissen – als Explorationswerkzeug für den Lernenden,
- bei der Kommunikation von Zusammenhängen (z.B. in Form interaktiver Bücher),
- in der geometrischen Forschung – als Werkzeug zur Erkundung mathematischer *Phänomene*.

Gängige DGS erlauben heute:

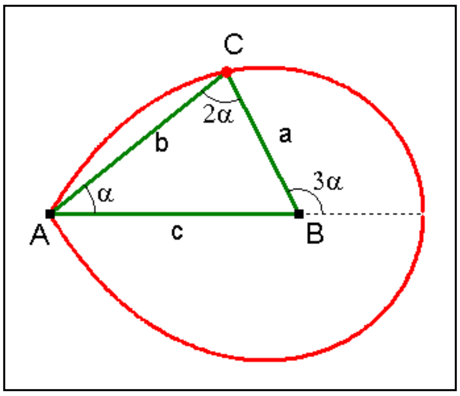
- das Dynamisieren schulgeometrischer (Zirkel- und Lineal-)Konstruktionen: der Zugmodus ermöglicht es, eine erstellte Zeichnung quasistetig zu verformen, wobei ihre konstruktionsbedingt geltenden geometrischen Eigenschaften erhalten bleiben,
- die Visualisierung der Ortslinie, die beim Ziehen an einem Basispunkt ein von diesem abhängiger Punkt beschreibt,
- das modulare Konstruieren durch Zusammenfassen von Folgen von Konstruktionsschritten zu einem *Makro*.

Diese Leistungsmerkmale von DGS erweitern gegenüber der Papiergeometrie den Handlungsspielraum in folgender Hinsicht:

- Im Zugmodus lassen sich geometrische Konfigurationen besser erkunden, denn er liefert gleich eine ganze Klasse von Zeichnungen: eine Figur. Durch Analyse der Eigenschaften, die beim Variieren erhalten bleiben, können geometrische Sätze als Invarianzeigenschaften entdeckt werden.
- Hinausgehend über die induktive Satzfindung unterstützt DGS mit dem Konzept der visuell-dynamischen Beweise auf der Darstellungsebene das inhaltlich-anschauliche, operative Beweisen im Sinne von Wittmann und Müller.
- Komplexere Konstruktionen werden erstmals durch ein Werkzeug auf der Darstellungs- und Handlungsebene unterstützt: Insbesondere Modulbildung und Ortslinien führen zu einer Erweiterung der Konstruktionsfertigkeiten.
- DGS dient als Werkzeug für gängige heuristische Problemlösestrategien wie Rückwärtsarbeiten oder Rückführung auf Spezialfälle.
- Das Zusammenspiel von Zugmodus und Ortslinien ermöglicht die visuelle Unterstützung fortgeschrittener heuristische Problemlösestrategien, die darauf basieren, eine Bedingung an die Lösung fallen zu lassen und die Daten zu variieren.



Mit dem neu entwickelten Konzept der *Heuristischen Rekonstruktion* verfügt die Abteilung über ein theoriegeleitetes Verfahren, um systematisch Lernumgebungen zu entwickeln, die den Aufbau heuristischer Kompetenzen ermöglichen, wie sie etwa in Polyas bekannter Tabelle aus „How to solve it!“ versammelt sind. Und wir haben ein methodisches Inventar (z.B. die Episodeneinteilung nach Schoenfeld) zur Bestimmung des heuristischen Gehalts von Problemlöseprozessen, das u.a. zur Validierung des heuristisch rekonstruierten Aufbaus der Mittelstufengeometrie dient, den wir zur Zeit erproben. Ziel ist dabei, durch geeignete unterrichtliche Vorbereitung die adäquate Bearbeitung komplexer Problemlöseaufgaben wie der obigen auch für nicht überdurchschnittlich begabte SchülerInnen zu ermöglichen.
DGS erweist sich dabei als ein durchaus mächtiges Werkzeug, nicht nur in heuristischer, sondern auch in mathematischer Hinsicht: So konstruierten zwei von uns beobachtete Schüler als heuristisches Hilfsmittel die Spur der Dreiecksecke C bei einem Dreieck vom obigen zweiten Typ:



Die entstehende Kurve ist Teil einer klassischen Kurve (Trisectrix von MacLaurin), die auch als Werkzeug zur Winkeldreiteilung verwendet werden kann. Der Zusammenhang wird plausibel, wenn man sich klar macht, dass Dreiecke vom Typ II der Forderung $\gamma = 2\alpha$ genügen. Übrigens folgt daraus auch eine Variation der Pythagoras-Eigenschaft:

$$a^2 + ab = c^2.$$

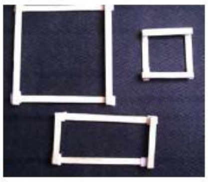
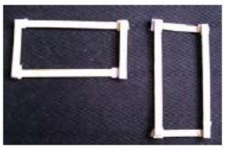
Damit schließt sich der o.a. Kreislauf: In unserer Lernumgebung erzeugen die SchülerInnen mit dem heuristischen Werkzeug DGS Phänomene, deren fachliche Durchdringung neue (elementar) mathematische Zusammenhänge offenlegen kann.

3 Multimodale Einstufung des Denkniveaus nach van Hiele

Die van Hiele-Niveaustufen sind ein geeigneter Theorierahmen, um die Entwicklung des mathematischen Denkens entlang der Bildungskette zu beschreiben, denn sie sind einerseits empirisch nachweisbar und andererseits inhaltlich interpretierbar. Um Lehr- und Lernprozesse sinnvoll gestalten zu können, ist eine Kenntnis dieser Niveaustufen wichtig: „Zwei Menschen die auf verschiedenen Ebenen denken und reden, können sich nicht verstehen. Das geschieht leider häufig zwischen Lehrer und Schüler“ (Franke 2000).
Daher wird in der Abteilung ein multimodaler Einstufungstest entwickelt, der später in der Hand des Lehrenden ein praktikables Diagnoseinstrument werden soll, um über das erreichte van Hiele-Level Informationen zum kognitiven Kompetenzaufbau ihrer Lernenden zu erhalten.

Enaktive und ikonische Repräsentationsformen mathematischer Inhalte sind auf dem Hintergrund der Brunerschen Theorie essentiell für die Denkentwicklung – sie haben in diesem Test folglich eine besondere Stellung, deren Einfluss auf die Validität des Tests zudem weiter erforscht werden soll.

Hier zwei Bearbeitungsbeispiele solcher multimodaler Aufgaben:

A  B  C 

Aufgabe 3: Falte aus dem gegebenen Zeitungspapierschnipsel ein Quadrat. Schreibe alle deine Arbeitsschritte in die nachstehende Tabelle. Begründe auch, warum dein Faltprozess wirklich zu einem Quadrat geführt hat.

#	Beschreibung	Erklärung / Begründung
1	Als erstes habe ich das Papier so gefaltet das die Seiten gerade sind.	So kann ich das Papier besser falten.
2	Danach habe ich so gefaltet, dass ein langer Papierstreifen entstand.	Um mehr überblich zu haben.
3	Den Papier Streifen habe ich dann noch dreimal gefaltet.	Damit ein Quadrat entsteht und damit es kleiner ist.
4	Ich habe nochmal nachgemessen.	Um zu gucken ob es ein Quadrat geworden ist.
5		

Im Rahmen einer Pilotstudie in Kooperation mit hannoverschen Schulen wird derzeit die Aufgabenauswahl und –präsentationsform für die endgültige Testform erprobt sowie die Reliabilität der Auswertungsprozedur optimiert.