Das Projekt LeduPro

Thomas Gawlick

Das Projekt LeduPro (Lernen durch Problemlösen) diente der Schaffung von Lerngelegenheiten für das Problemlösen. Denn das Problemlösen ist ja eine im Hinblick auf den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts (Winter 1995, 37) wichtige und fächerübergreifende Kompetenz, die im Mathematikunterricht erworben werden soll - allerdings mangelt es nach Rückmeldung aus der Schulpraxis hierzu oftmals an Lerngelegenheiten, was insbesondere zu einer fehlenden Vernetzung mathematischen Wissens führt. (Bruder & Krüger 2018, 226f)

LeduPro

Lernen durch Problemlösen

Das Projekt LeduPro (Lernen durch Problemlösen) ging das in zwei Phasen an: Ein klassenweises Training in Stillarbeit und ein Kleingruppentraining mit heuristischen Impulsen und gemeinsamer Rückschau.

Das klassenweise Training

In den beteiligten Schulen wurden von SchülerInnen der Jahrgänge 7-9 in einem Zeitraum von 6 Wochen während des Schuljahres 2018/2019 sieben aufeinander bezogene Aufgaben bearbeitet. Ein Zeitumfang von etwa 20 Minuten je Woche im Rahmen des Mathematikunterrichts war dazu ausreichend.

Im Fokus stand bei diesem Training dabei nicht der Erwerb neuen Wissens, sondern die Steigerung der Problemlösekompetenz der teilnehmenden SchülerInnen. Um alle SchülerInnen auf ihrer jeweiligen Kompetenzstufe zu erreichen, wurde das Aufgabenmaterial zur Binnendifferenzierung in Teilaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit abgestuft. Dadurch war es den Teilnehmenden möglich, sich wöchentlich selbst für einen Schwierigkeitsgrad zu entscheiden.

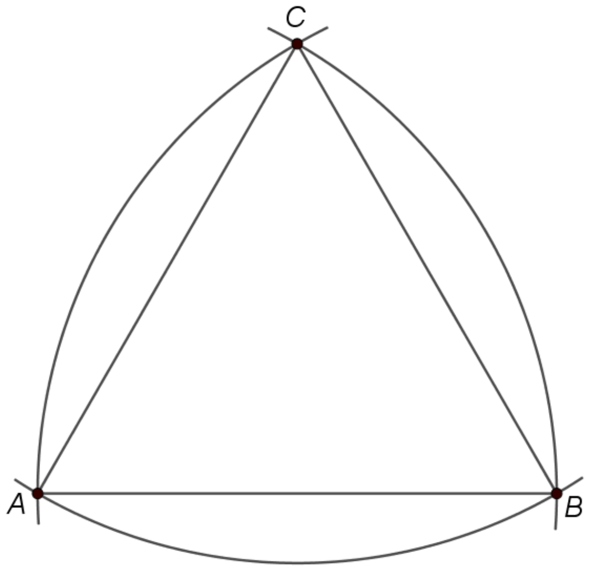
Eine Bewertung der Bearbeitung war nicht intendiert und eine explizite Besprechung der Bearbeitungen im Rahmen der 20 Minuten je Woche natürlich nicht möglich – vielmehr erhielten die Teilnehmenden wöchentlich von uns auf ihren Bearbeitungen Hilfestellungen und Rückmeldungen hinsichtlich der verwendeten Heurismen und der Ausführlichkeit ihrer Lösungsdarstellung. Hierdurch bietet sich für die Lernenden die Chance, heuristische Impulse als Sinnvoll zu erfahren und für sich selbst nutzbar zu machen, sodass diese in ihrer weiteren Schullaufbahn (oder auch darüber hinaus) davon profitieren können.

Die Lehrkräfte erhielten darüber hinaus summarische Rückmeldungen zu den erzielten Lernfortschritten.

Eingangs wurde die Lernausgangslage der Lernenden erhoben, sowohl mit Hilfe einer Routineaufgabe (E1) als auch anhand einer Problemaufgabe (E2).

E1 – Einstiegsaufgabe

Abbildung



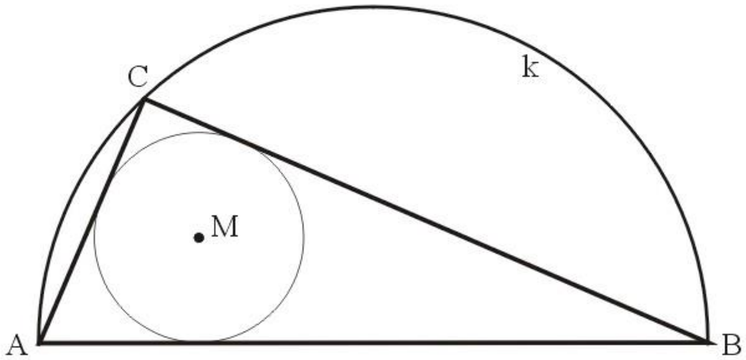
Aufgabenstellung

Gegeben ist das Dreieck ABC. Jeder Eckpunkt ist der Mittelpunkt eines Kreisbogens, der jeweils durch die beiden übrigen Eckpunkte verläuft.

Begründe, dass dann alle Innenwinkel 60° groß sind.
Hinweis: Wozu hast du solche Kreisbögen früher schon einmal benutzt?

E2 – Erhebungsaufgabe

Abbildung



Aufgabenstellung

$\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Halbkreises k, C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B). M ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC.

Bestimme die Größe des Innenwinkels μ des Dreiecks AMB bei M.

Abbildung 1: Die Aufgaben der Eingangserhebung

Zur Bearbeitung dieser und ähnlicher Aufgaben erhielten die Schüler zugleich als Handreichung eine Hinführung zum Problemlösen, in der ihnen das intendierte Vorgehen am Beweis des Innenwinkelsummensatzes erläutert wird.

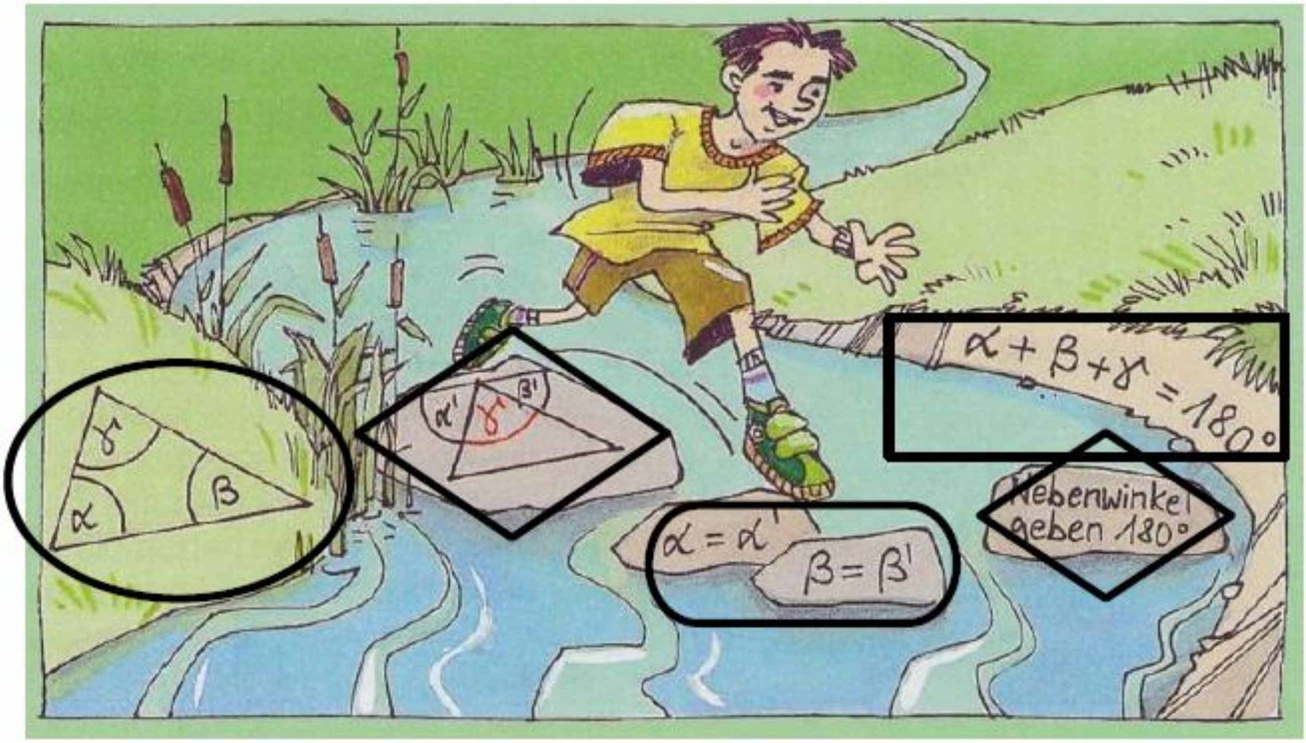


Abbildung 2: Illustration aus „Elemente der Mathematik 7“ (Griesel et al 2010, S.145) mit eigenen Hervorhebungen

Als Beispiel zur Findung eines Beweises wurde der Lösungsweg aus „Elemente der Mathematik 7“ (Griesel et al. 2010, S.145) gewählt und auch die dort gewählte Metapher „Problemlösen als Bachüberquerung“ aufgegriffen (Abb. 2). Dabei werden auch die in den Rückmeldungen verwendeten heuristischen Impulse erläutert: Diese werden als Frage eingeführt und durch ein kurzes Stichwort in den Pfeilen in Abb. 3 symbolisiert. Diese Impulse liefern Zwischenziele für den Lösungsweg oder Hilfsmittel, mit denen diese erreicht werden können.

Hinter dieser Darstellung steht die Sicht auf den Lösungsprozess als Wechselspiel von heuristischen Steuerungsimpulsen und dadurch abrufbaren Wissenselementen (in den blauen Kästen in Abb.3), die der Problemlöser zu einem Lösungsweg zusammenzusetzen versucht.

Diese Hinführung sowie die bearbeiteten und mit Rückmeldungen versehenen Aufgaben wurden in Mappen gesammelt, die den SuS zur Bearbeitung der nächsten Trainingsaufgaben wieder ausgehändigt wurden, so dass sie auf eigene Lösungswege und gegebene heuristische Impulse zurückgreifen konnten. Die Rückmeldungen verwenden die in der Hinführung eingeführten heuristische Impulse und zeigen ihre Anwendung im Kontext der aktuellen Aufgabenstellung, vgl. Abb. 3.

Beim Aufgabenlösen geht es darum einen Lösungsweg zu finden, der den Weg zwischen Gegebenem und Gesuchtem herstellt. Dabei sind Hilfsmittel vonnöten, die Teilziele als Voraussetzung haben (daher „Teilziel?") und die Folgerungen auf neue Teil- oder Endziele erlauben. Eines dieser Hilfsmittel ist der Satz des Thales: Liegt C auf einem Kreis, der die Seite AB als Durchmesser hat, besitzt das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

Abb. 3: Beispielrückmeldung zu einer unvollständigen Bearbeitung

Inhaltlich adressieren die 4 Trainingsaufgaben T1 bis T4 die Verwendung bekannter Lehrsätze der Mittelstufengeometrie wie Satz des Thales, Innenwinkelsumme und Satz vom Inkreis, die auf bisher ungewohnte Weise verknüpft werden müssen. Das wiederholte Stellen solcher Aufgaben kann zu einem verbesserten Bearbeitungserfolg durch größere Geläufigkeit beim Einsatz der Hilfsmittel führen, was als die implizite oder explizite Verwendung von Heurismen wie *„Kennst Du eine verwandte Aufgabe?"* oder *„Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?"* aufgefasst werden kann. Explizit adressieren einige Aufgaben auch das Analogisieren oder das Verallgemeinern von Spezialfällen.

Beides kann ein Weg sein, um die in der Erprobungsaufgabe auftretende Barriere zu überwinden: Wie im Beweis vom Satz des Thales ist hierbei ebenfalls vonnöten, den Innenwinkel γ eines Dreiecks durch die anderen beiden Winkel α und β auszudrücken, vgl. Gawlick & Begerow (2014) und Gawlick (2017).

Die abschließende Bearbeitung der Erprobungsaufgabe E3, einer Parallelaufgabe der Problemaufgabe E2, sollte zeigen, ob die Lernenden vom Bearbeiten der Materialien und den Rückmeldungen profitiert haben.

Abb.4 zeigt den Ablauf des klassenweisen Trainings im Überblick

Sitzung	0	1	2	3	4	5	6
Inhalt	Vorstellen Verteilen der Hin-führung	E1 E2	 T1	Rückgabe von T1 T2	Rückgabe von T2 T3	Rückgabe von T3 T4	Rückgabe von T4 E3

Abb.4: Der Ablauf der Sitzungen des klassenweisen Trainings

Das Kleingruppen-Training

In einer zweiten Phase des Projektes wurden dieselben Aufgaben im Abstand von einigen Monaten von ausgewählten Lernenden der Projektklassen noch einmal bearbeitet (vgl. Abb .5), sowie auch von Teilnehmenden des in Kooperation mit [Forschergeist e.V](). .

veranstalteten Enrichment-Projektes Leibniz-Kurs (vgl. Abb, 6) und mit Lehramtsstudierenden (Abb. 7).

Ablauf des Trainings an den Schulen (mit den Probanden S8a04 & S8a23)

	Sitzung 1	Sitzung 2	Sitzung 3
	02.10.19	27.11.19	05.01.20
1. Aufgabe	E2	T2	T4
	Operatorsammlung		
2.Aufgabe	T1	T3	E3

Abb. 5: Ablauf des Trainings an den Schulen

Ablauf des Trainings im Leibniz-Kurs (mit den Probanden L01, ..., L05)

	Sitzung 1	Sitzung 2	Sitzung 3	Sitzung 4	Sitzung 5	Sitzung 6	Sitzung 7
Datum	28.2.	07.3.	21.3.	28.3.	4.4	25.4.	2.5.
1. Aufgabe	E2 *(alle)*	T1 *(L01, L02, L03, L04, L05)*	T2 *(L02, L03)*	T2 *(L01, L04, L05)* T3 *(L01, L03, L04)*	T3 *(L02, L05)* T4 *(L01, L04)*	T4 *(L02, L03, L05)* E3 *(L01, L03, L04)*	E3 *(L02, L05)*
Gruppenphasen	E2 *(L01, L04)* E2 *(L02, L03, L05)*	T1 *(L02, L05)*	T1 *(L01, L03)* T1 *(L04)*	T2 *(L01, L04, L03)* T2 *(L02, L03, L05)*	T3 *(L01, L04)* T3 *(L02, L03, L05)*	T4 *(L01, L04)* T4 *(L02, L03, L05)*	E3 *(L01, L04)* E3 *(L02, L03, L05)*
	Operatorsammlung						

Ablauf einer Trainingssitzung im Leibniz-Kurs (im Regelfall)

Zeit	Trainingsinhalt
14:30 – 15:15	Einzelinterviews mit L02, L03, L05
15:15 – 15:45	Gruppenphase mit L02, L03, L05
16:00 – 16:30	Einzelinterviews mit L01, L04
16:30 – 17:00	Gruppenphase mit L01, L04

Abb. 6: Ablauf des Trainings im Leibniz-Kurs

Ablauf des Trainings mit Studierenden (mit den Probanden R03,..., R06)

	R03, R04		R05, R06	
	Sitzung 1	Sitzung 2	Sitzung 1	Sitzung 2
Datum	11.11.	25.11	21.11.	05.12
1. Aufgabe	E2	T3	E2	T3
	Operatorsammlung		Operatorsammlung	
2. Aufgabe	T1	T4	T1	T4
3. Aufgabe	T2	E3	T2	E3

Abb. 7: Ablauf des Trainings mit Studierenden

In den Sitzungen wurden die Aufgaben zunächst mit lautem Denken bearbeitet. Anschließend erhielten die SuS in einer Rückschau auf ihre Bearbeitung gezielte heuristische Impulse, um ihre Lösungsansätze weiterzuführen. In einer anschließenden Gruppenphase stellten sie sich gegenseitig ihre Lösungswege vor und gaben einander so weitere Anregungen zur Lösungsfindung.

Die Lösungswege wurden in der Gruppen dabei einheitlich in Form eines Drei-Spalten-Beweises festgehalten: In der ersten Spalte „müssen die Schüler Zeile für Zeile mathematische Schritte aneinander reihen und so einen Weg […] vom Gegebenen zum Gesuchten finden“ (Brockmann-Behnsen 2013, S.206f), in der zweiten Spalte sind die Lehrsätze anzugeben, durch die der jeweilige Schritt vollzogen werden kann, in der dritten Spalte, die Voraussetzungen, aufgrund derer das möglich ist. Der Drei-Spalten-Beweis ist somit ein heuristisches Hilfsmittel für die Phase der Plandurchführung bzw. Lösungsdarstellung, da er zur Vollständigkeit und Zielgerichtetheit der gemachten Angaben anhält.

Erste Ergebnisse

Das klassenweise Training wird derzeit noch ausgewertet. In den Lösung dominiert eine Strategie des „spontanen Vorantastens“ (Krummheuer 1989): Die Lernenden verwenden eine Variante des Vorwärtsarbeitens, die die Vielzahl der Wahlmöglichkeiten bei dieser Strategie dadurch begrenzt, dass ausgehend von einer Startgröße sukzessive weitere „benachbarte“ Größen (also z.B. andere Winkel desselben Dreiecks) berechnet werden, bis evtl. die Zielgrößen erreicht werden. Diese Strategie ist anscheinend bei Routineaufgaben hinreichend erfolgreich, so dass sie auch ohne explizite Instruktion häufig angewendet wird - bei Aufgaben mit einer Barriere wie im Thales-Beweis kommt sie aber an ihre Grenzen, wenn eine Kombination (z.B. die Summe) variabler Größen zu berechnen ist, ohne diese Größen einzeln zu bestimmen, vgl. Gawlick & Begerow (2014) und Gawlick (2017).

Die Analyse des Kleingruppentrainings zeigt einerseits eine hohe personabhängige Stabilität des gewählten Vorgehens, andererseits aber auch eine Wechselwirkung von Problemlöser und Aufgabentyp bei der Strategiewahl sowie eine vermutlich trainingsinduzierte Akzentverschiebung weg von der Strategie des „spontanen Vorantastens“ hin zu einem kombinierten Vorwärts-und Rückwärtsarbeiten mit erhöhter Erfolgswahrscheinlichkeit (Welzel & Gawlick 2020).

Weiterhin zeigen sich Scaffolding-Effekte, einerseits durch die heuristischen Impulse in der individuellen Rückschau, andererseits durch die gemeinsame Rückschau mit anderen Problemlösern, dahingehend, dass es bei erneuter Begegnung mit einer vergleichbaren Begegnung mit mehr oder weniger Überlegen gelingt, durch Termumformung das gewünschte Ergebnis ohne explizite Kenntnis aller Zwischengrößen zu erlangen. (Liberto & Gawlick 2020).

Diese Ergebnisse zeigen, dass das Projekt LeduPro seinem Namen gerecht wird: An diesen Stellen, auf diese Weise kam es zum Lernen durch Problemlösen.

Literatur

Brockmann-Behnsen, D. (2013). Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis. In: Greefrath, G., Käpnick F. & Stein, M. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (S. 204–207). Münster: WTM-Verlag.

Bruder, R. & Krüger, U. (2018). Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen (LEMAMOP). In: Biehler, R. et al. (Hrsg.): Mathematikfortbildungen professionalisieren. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018.

Gawlick, Th. (2017) Beweise organisieren und reflektieren - mit Tempeln. Der Mathematikunterricht 4, 2017, S.29-37

Gawlick, Th. & Begerow, S. (2014). Analyse der Graphen von Lösungen der TIMSS-Aufgabe K10. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM.

Griesel, H.; Postel, H.; Suhr; F.; Ladenthin, W. (2004ff): Elemente der Mathematik. Braunschweig: Schroedel

Krummheuer, G. (1989): Die menschliche Seite am Computer. Studien zum gewohnheitsmäBigen Umgang mit Computern im Unterricht. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Liberto, N. & Gawlick, Th. (2020): Scaffolding-Effekte beim Lösen verwandter Problemaufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM.

Welzel, G. & Gawlick, Th. (2020): Einmal rückwärts, immer rückwärts? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46.