

Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Volkhardt Fuhrmann  
(Hrsg.)

# $dx, dy$ – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung. Teil I.



*Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Volkhardt Fuhrmann (Hrsg.)*

*dx, dy*

# Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung. Teil I.

Mit Beiträgen von

<i>Peter Baumann [Ba]</i>	<i>Berlin</i>
<i>Thomas Bedürftig [Be]</i>	<i>Hannover</i>
<i>Jochen Dörr [D]</i>	<i>Speyer</i>
<i>Volkhardt Fuhrmann [F]</i>	<i>Worms</i>
<i>Christine Hahn [H]</i>	<i>Worms</i>
<i>Christian Kauferstein [Ka]</i>	<i>Linz am Rhein</i>
<i>Thomas Kirski [Ki]</i>	<i>Berlin</i>
<i>Karl Kuhlemann [Ku]</i>	<i>Hannover</i>
<i>Wilfried Lingenberg [Li]</i>	<i>Pirmasens</i>

und Links zu

<i>Stefan Basiner</i>	<i>Dortmund</i>
<i>Stefanie Heinsen</i>	<i>Bolanden</i>

Diese Handreichung ist aus Lehrerfortbildungen, Arbeitstreffen der Autoren und aus praktischen Erprobungen im Unterricht hervorgegangen. Das Projekt wird seit 2015 vom Institut für Lehrerfortbildung (ILF) in Mainz unterstützt.

ISBN 978-3-00-065642-2

© Die Urheberrechte liegen bei den jeweiligen Autoren. Die private Nutzung der Handreichung sowie Vervielfältigungen daraus sind, mit Angabe der Quelle, für den Unterricht und die Lehre ausdrücklich erlaubt. Jede weitere, insbesondere kommerzielle, Nutzung muss mit den Autoren schriftlich vereinbart werden.

Baumann@nichtstandard.de  
beduerftig@idmp.uni-hannover.de  
rv.fuhrmann@web.de

Allen, die in der Zeit unserer Arbeit an diesem Buch  
uns geduldig unterstützt und ertragen haben.



# Vorwort

Wir schlagen einen anderen Einstieg in die Schulanalyse vor. Er beginnt, wenn es um die Ableitung und das Integral geht, wie gewöhnlich mit Näherungsprozessen, die aber quasi vor den unerreichbaren Grenzwerten halt machen und bei unendlich kleinen Strecken und Zahlen, den Infinitesimalen, stehen bleiben. Das Rechnen mit den neuen Zahlen löst den schwierigen, abstrakten Grenzwertformalismus ab, und die unendlich kleinen Strecken bieten eine – mathematisch legitime – geometrische Veranschaulichung der Verhältnisse beim Differenzieren und Integrieren.

Es geht um den Einstieg. Alles Folgende ist wie sonst: Die Arbeit mit den Schulbüchern und Materialien geht weiter, und es gibt keinen Konflikt mit den Richtlinien in Rheinland-Pfalz (und fast allen anderen Bundesländern).

Wir schlagen diesen Einstieg vor, da wir gute und interessante Erfahrungen im Unterricht gemacht haben, und ermutigen Sie, mit unserer Handreichung den eigenen Versuch im Unterricht zu machen.

Der Kern unserer Handreichung ist das Kapitel 2, der Unterrichtsgang (S. 9 - 42). Um konkret zu sehen, was neu – und wie vieles (!) wie gewohnt – ist, können Sie gleich z.B. in den Abschnitt 2.1 zur Ableitung springen oder im Abschnitt 2.3 der Entwicklung der neuen Arithmetik folgen. Oder Sie schlagen einfach nach Ihren Interessen das Heft auf. In der Einleitung, nach dem Inhaltsverzeichnis, geht es um erste Klärungen, eine kommentierende Übersicht und allgemeine Hinweise, zu denen man zurückblättern kann, wenn man ein erstes konkretes Bild gewonnen hat.

Berlin  
Hannover  
Worms

*Peter Baumann  
Thomas Bedürftig  
Volkhardt Fuhrmann*

im Mai 2020





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Unterrichtsgang</b>	<b>9</b>
2.1	Ableitung . . . . .	9
2.2	Integral . . . . .	19
2.3	Arithmetik . . . . .	31
2.3.1	Ein Beweis im Unterrichtsgespräch . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Ergänzungen und Erweiterungen</b>	<b>43</b>
3.1	Von der 0,999...-Frage zur Ableitung . . . . .	43
3.2	Veranschaulichung hyperreeller Zahlen . . . . .	55
3.3	Substitution . . . . .	58
3.4	Trigonometrische Funktionen . . . . .	61
3.4.1	Zur Streckung des Kreises mit infinitem Faktor . . . . .	65
3.5	Einstieg in Exponentialfunktionen . . . . .	66
3.6	Uneigentliches Integral . . . . .	74
3.7	Limes-Schreibweise und Nichtstandard . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Vergleich</b>	<b>83</b>
4.1	Gegenüberstellung . . . . .	83
4.1.1	Ableitung . . . . .	83
4.1.2	Zum Rechnen mit infinitesimalen und infiniten Zahlen	86
4.1.3	Integral . . . . .	87
4.2	Vergleich . . . . .	89
4.3	Stetigkeit . . . . .	93
4.4	Rückblick . . . . .	96
4.5	Schluss . . . . .	98
4.5.1	Neu denken . . . . .	98
4.5.2	Schlusswort . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Literatur und Links</b>	<b>101</b>
5.1	Auswahlbibliographie . . . . .	102



# Kapitel 1

## Einleitung [Be]

*Unfehlbarkeit in wissenschaftlichen Belangen  
ist für mich unwiderstehlich komisch.*

Charles S. Peirce

Die Handreichung hat zwei Teile. Hier, im *Teil I*, wird konkret der Einstieg in die Analysis dargestellt. Der *Teil II* wird über Gegenstände aus dem mathematischen Hintergrund berichten.

Gewöhnlich erfolgt der Einstieg in die Analysis über Grenzprozesse und Grenzwerte, das ist Standard. Wir folgen in unserem Zugang dem Ansatz der sogenannten „Nichtstandard-Analysis“. „Nichtstandard“ hört sich nach „exotisch“ oder „verboten“ an. Das ist falsch. Richtig ist, dass „Nichtstandard“ so mathematisch wie „Standard“ ist, – nur nicht der Standard im Unterricht und in der Lehre.

Während wir den neuen Zugang vorstellen, denken wir uns den üblichen Grenzwerteinstieg mit und zitieren ihn gelegentlich. Im Kapitel 4 stellen wir dann beide Ansätze nebeneinander. Dabei wird erkennbar, dass in unserem Zugang die bekannten Probleme der Grenzprozesse und Grenzwerte nicht auftreten. Diese Probleme sind so gravierend, dass man in den Curricula auf einen unpräzisen, gefühlsmäßigen „propädeutischen Grenzwertbegriff“ ausgewichen ist. Der neue Zugang mit seiner Arithmetik hingegen bietet eine klare mathematische Grundlage. Sie ist, davon sind wir überzeugt, ein tragfähiges Fundament für die folgenden Jahre Analysis in der Schule und darüber hinaus.

Infinitesimalien sind, wie in der Vorbemerkung gesagt, unendlich kleine Zahlen oder Strecken. Die unendlich kleinen Strecken, die man mit der „Unendlichkeitslupe“ wie endliche Strecken veranschaulichen kann (und darf, s. Abschnitt 6.2), bilden den geometrischen Hintergrund. Wo unendlich kleine Zahlen sind und gerechnet wird, sind auch unendlich große, „infinite“ Zahlen. Wie sie praktisch entstehen, kann man gut bei der Einführung des

Integrals im Abschnitt 2.2 sehen. Abschnitt 2.3 ist ganz dem erweiterten Rechnen gewidmet. Er versucht einen Weg zu zeigen, wie die neuen Zahlen, die *infinitesimalen* wie die *infiniten* Zahlen, *gemeinsam* mit den Schülerinnen und Schülern, entdeckt und erfunden werden können. Geht es um einen Grenzprozess z.B. von Sekantendreiecken, kommt spontan von manchen Schülerinnen oder Schülern eine Äußerung wie: „Das muss unendlich klein werden“. Der Abschnitt 2.3 beginnt hier, mit der Klärung, was unendlich klein bedeuten kann. Kombiniert mit den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bilden die infinitesimalen und infiniten Zahlen die *hyperreellen* Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$ . Wir entwickeln die Arithmetik bewusst und ausdrücklich als *Theorie*.

Kapitel 3 vertieft und ergänzt methodisch und didaktisch den grundlegenden Unterrichtsgang im Kapitel 2 und bietet Alternativen und Erweiterungen an. Kapitel 4 stellt beide Zugänge, über Grenzprozesse und über Infinitesimalien, einander gegenüber und vergleicht sie unter methodischen und didaktischen Gesichtspunkten. Zusätzlich zum Unterrichtsgang machen wir Bemerkungen über die Stetigkeit, da hier die Differenz im Denken besonders deutlich wird.

Im Abschnitt 6.1, mit dem der Teil II beginnt, wird notiert und kurz kommentiert, auf welchen Axiomen und Prinzipien die praktische mathematische Arbeit ruht. Die Situation ist wie bei den reellen Zahlen, die man in der 9. Klasse einführt, die ihre Arithmetik gewöhnlich wortlos von den rationalen Zahlen erben.

Dann, im Abschnitt 6.2, wird erläutert und nachgewiesen, dass die Unendlichkeitslupe kein methodischer Trick, sondern eine mathematisch legitime Methode ist. Die Vorstellung der Graphen der (stetig differenzierbaren) Funktionen im Unterricht als Zusammensetzung unendlich kleiner Strecken, dann die Veranschaulichung von Steigungen in einem Punkt mit unendlich kleinen Dreiecken (Abschnitt 2.1) und das Integral als Summe von Rechtecken mit infinitesimaler Seitenlänge (Abschnitt 2.2) ist so legitim wie das Zeichnen endlicher Figuren. Schon Leibniz (1646–1716) und seine Schüler haben intuitiv so mit Veranschaulichungen infinitesimaler Verhältnisse gearbeitet. Das unendlich kleine Dreieck hieß damals „charakteristisches Dreieck“.

Es geht im Abschnitt 6.3 um diesen historischen Hintergrund. Jeder weiß, dass die Symbole  $dx, dy$  auf Leibniz zurückgehen, der die „Infinitesimalrechnung“ entwickelt hat. Der Einstieg, den wir vorschlagen, hat also eine lange und ruhmreiche Tradition. Er unterscheidet sich nur in seiner mathematischen Grundlage, die historisch geometrisch-anschaulich war. Heute ist sie mengentheoretisch und arithmetisch fundiert, ohne die geometrische Anschaulichkeit zu verlieren.

In einem vierten Abschnitt im Kapitel 6 deuten wir die mengentheoretische Konstruktion der *hyperreellen Zahlen* an. Der Abschnitt 3.1 führt schon in diese Richtung. Die mengentheoretische Mathematik aber ist, wie auch

der logische Zugang, für die mathematische Praxis und die Unterrichtspraxis nicht relevant. Es ist jedoch wichtig, über sie zu informieren.

In einem Anhang in Teil II schließlich stellen wir Auszüge aus den Rahmenrichtlinien der Länder zusammen, kommentieren sie und werfen einen Blick auf Abituraufgaben.



# Kapitel 2

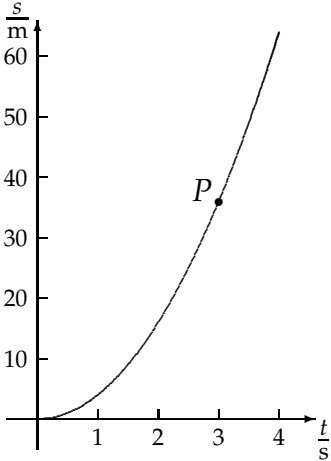
## Unterrichtsgang

### 2.1 Ableitung von Funktionen [F/H]

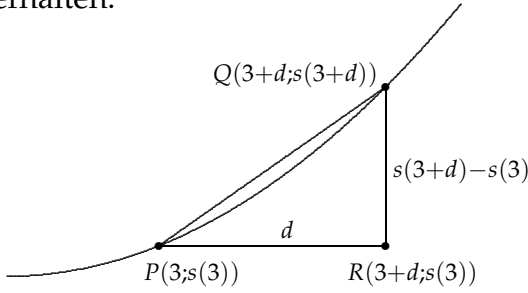
Die im Folgenden vorgestellte Unterrichtsreihe zum Einstieg in die Differentialrechnung kommt ohne die üblichen Grenzwertprozesse aus. An deren Stelle tritt eine fundierte Arithmetik, mit deren Hilfe die aus der Standard-Mathematik bekannten Grenzwerte berechnet werden.

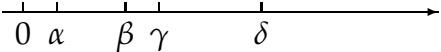
Die gewonnenen Ergebnisse sind also nicht neu, deren Bestimmung liegen aber verschiedene Anschauungen zugrunde: Sind es standard-mathematisch eigentlich abstrakte epsilon-delta-Formalismen, von denen im Unterricht in der Regel nur unklar auf propädeutische Grenzwertformulierungen ausgewichen wird, so werden wir hier mit infinitesimalen Zahlen rechnen. Dieses Rechnen deuten wir dort an, wo und soweit wir es brauchen. Systematisch wird das Rechnen mit allen hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  in der Unterrichtsskizze 2.3 entwickelt.

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p><i>Von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit</i></p> <p>Einführende Aufgabe: <i>Bei maximaler Beschleunigung eines „Ferrari 458 Italia“ aus dem Stand lässt sich die zurückgelegte Wegstrecke in Abhängigkeit von der Zeit mit der Funktion <math>s = 4t^2</math> beschreiben (<math>s</math> in Metern, <math>t</math> in Sekunden).</i></p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 1</i></p> <p>Hier können auch andere Eingangsbeispiele verwendet werden (Steigung der Normalparabel, andere Beschleunigungsprobleme wie</p>

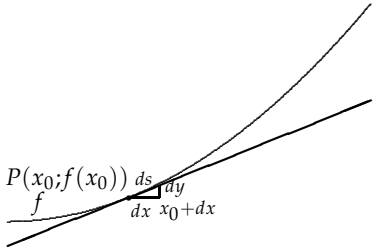
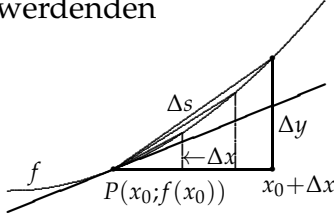
<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p data-bbox="244 416 879 488"><i>Welche Geschwindigkeit hat der Ferrari drei Sekunden nach dem Start erreicht?</i></p>  <p data-bbox="244 1120 319 1149">Idee:</p> <p data-bbox="244 1155 879 1458">Die <u>gesuchte Momentangeschwindigkeit</u> lässt sich nicht sofort angeben, aber wegen <math>v = \frac{s}{t}</math> erhält man sicher eine gute Näherung, wenn man die zurückgelegte Strecke einmal nach 3 Sekunden und dann noch einmal eine kurze Zeit später (z.B. nach 3,2 Sekunden) berechnet und dann die Weg- und Zeitdifferenzen dividiert:</p> $v \approx \frac{s(3,2) - s(3)}{0,2} = 24,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$ <p data-bbox="244 1655 879 1883">Diese 24,8 m/s stellen die <u>Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall von 3 bis 3,2 Sekunden</u> dar; graphisch bedeutet dieser Wert die <u>Steigung der Sekante</u> durch die Punkte <math>P(3/s(3))</math> und <math>Q(3,2/s(3,2))</math>.</p>	<p data-bbox="906 416 1287 640">Freier Fall usw.) und natürlich das bisher favorisierte Eingangsbeispiel eines jeden Lehrers im <i>Standardanalysis-Unterricht</i>.</p> <p data-bbox="906 1155 1287 1883">Allen möglichen Einführungsbeispielen gemeinsam ist das Problem, die Steigung eines krummlinigen Graphen in einem Punkt zu bestimmen, also das „Tangentenproblem“: Die Tangente mit ihrer Steigung liefert die Steigung des Graphen in einem bestimmten Punkt und somit – je nach Aufgabenstellung – die momentane Änderungsrate bzw. die Momentangeschwindigkeit. Man bildet wie üblich zunächst Sekanten mit zugehörigen Steigungsdreiecken und</p>



<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Eine noch bessere Näherung ergibt sich für eine zeitliche Differenz von 0,1 Sekunde:</p> $v \approx \frac{s(3,1) - s(3)}{0,1} = 24,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$ <p>Allgemein kann man für die zeitliche Differenz <math>d</math> die Näherungsgeschwindigkeit mithilfe des Terms</p> $v \approx \frac{s(3+d) - s(3)}{d}$ <p>erhalten.</p>  <p>Aber egal, wie klein man <math>d</math> vorgibt, es bleibt ein Näherungswert.  <math>\implies</math> Das Steigungsdreieck müsste <b>unendlich klein</b> werden.  Dann würde aus der Sekante mit ihrer Sekantensteigung eine Tangente mit ihrer <u>Tangentensteigung</u>, die dann der Steigung der <u>Parabel</u> in diesem Punkt <math>P(3; s(3))</math> entspricht.  Aus einer Durchschnittsgeschwindigkeit würde die <u>gesuchte Momentangeschwindigkeit</u>.</p> <p><i>Exkurs</i></p> <p>Diese unendlich kleinen Zahlen kann man sich so vorstellen:</p>	<p>Differenzenquotienten der Form <math>\frac{\Delta y}{\Delta x}</math> als Näherung für die gesuchte Tangentensteigung.</p> <p>Es sind zumeist die Schülerinnen und Schüler selbst, die die Steigungsdreiecke als „unendlich klein“ fordern, um die Näherung zu verbessern.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 2</i></p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>1. <u>Infinitesimale Zahlen</u> sind kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl.</p> <p>2. Die Summe und die Differenz zweier Infinitesimalzahlen sind wieder infinitesimal.</p> <p>3. Das Produkt aus einer infinitesimalen und einer reellen Zahl ist infinitesimal.</p> <p>4. Definition: Zahlen der Form <math>r + dx</math>, wobei <math>r</math> reell und <math>dx</math> infinitesimal ist, heißen <u>finite Zahlen</u>. <math>r</math> ist der <u>reelle Teil</u> der finiten Zahl.</p> <p><u>Anschauliche Begründung für 1. und 2.:</u>          Außer 0 liegt keine weitere reelle(!) Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!</p>  <p>Auch die Summe und die Differenz zweier solcher Infinitesimalen sowie deren reelle Vielfache bleiben in diesem Ausschnitt und sind damit kleiner als jede positive reelle Zahl, also infinitesimal.</p>	<p>Die Infinitesimalzahlen bilden eine Teilmenge der sogenannten hyperreellen Zahlen. Ihre Arithmetik wird in der Unterrichtsskizze 2.3 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt – beginnend mit der Frage „Wie können wir ausdrücken, dass eine Zahl unendlich klein ist?“ Für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler und die benötigten Rechnungen sind die wenigen hier im Exkurs genannten Informationen über die Infinitesimalzahlen ausreichend.</p> <p>In diesem Unterrichtsgang steht das möglichst schnelle Lösen des Steigungsproblems im Vordergrund. Daher sind hier keine Beweise vorgesehen (s. 2.3). Wer dennoch an dieser Stelle Beweise führen möchte, für den seien sie hier angedeutet:</p> <p>Zu 2.: <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> seien infinitesimal. Dann sind beide kleiner als <math>\frac{r}{2}</math> für jedes positive reelle <math>r</math>. Daher ist <math>\alpha + \beta &lt; \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r</math>. Also ist auch <math>\alpha + \beta</math> infinitesimal.</p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p data-bbox="320 678 868 721"><i>Differentialquotient und Ableitung</i></p> <p data-bbox="320 759 959 875">Mit Hilfe dieser unendlich kleinen Zahlen können wir nun das Steigungsdreieck unendlich klein wählen.</p> <p data-bbox="320 920 959 987">Wir nennen die infinitesimale Zeitdifferenz <math>dt</math> und rechnen mit ihr so weiter:</p> $  \begin{aligned}  \frac{s(3+dt)-s(3)}{dt} &= \frac{4 \cdot (3+dt)^2 - 4 \cdot 3^2}{dt} \\  &= \frac{4 \cdot (9+6dt+dt^2) - 36}{dt} = \frac{36+24dt+4dt^2-36}{dt} \\  &= \frac{24dt+4dt^2}{dt} = 24 + 4dt.  \end{aligned}  $ <p data-bbox="320 1200 959 1391">Mit <math>dt</math> ist auch <math>4dt</math> infinitesimal (vgl. Exkurs). Das bedeutet, dass der Unterschied zwischen dem gefundenen Wert und der gesuchten Momentangeschwindigkeit kleiner ist als jede positive reelle Zahl.</p> <p data-bbox="320 1391 959 1458">Man sagt hierfür auch: Der Wert ist <u>infinitesimal benachbart</u> zu 24.</p> <p data-bbox="320 1469 959 1648">Man darf den Unterschied vernachlässigen und die gesuchte Momentangeschwindigkeit mit <math>24 \frac{\text{m}}{\text{s}}</math> angeben, da 24 der reelle Teil der finiten Zahl ist, und nur dieser ist in der realen Situation erfassbar.</p> <p data-bbox="320 1693 959 1883">Das Vorgehen mit infinitesimalen Änderungen <math>dx</math> zur Berechnung der momentanen Änderungsrate bzw. Momentangeschwindigkeit lässt sich folgendermaßen <u>veranschaulichen</u>:</p>	<p data-bbox="986 416 1362 640">Zu 3.: Sei <math>\alpha</math> infinitesimal und <math>k</math> reell und positiv. Dann ist <math>\alpha &lt; \frac{r}{k}</math> für jedes positive reelle <math>r</math>. Daher ist <math>k \cdot \alpha &lt; k \cdot \frac{r}{k} = r</math>. Also ist auch <math>r \cdot \alpha</math> infinitesimal.</p> <p data-bbox="986 678 1339 721"><i>Unterrichtsabschnitt 3</i></p> <p data-bbox="986 1200 1362 1581">Hier wird deutlich, dass die Infinitesimalien beim Lösen eines realen Problems als rechnerisches Kalkül verwendet werden. Als Lösung des realen Problems zählt daher dann auch genau der <u>reelle Teil</u> (Standardteil) des finiten Ergebnisses.</p> <p data-bbox="986 1693 1362 1883">In der Gegenüberstellung zur üblichen Vorgehensweise in der <i>Standard-Mathematik</i> zeigen sich die Vorzüge des infinite-</p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
 <p>Das <u>Steigungsdreieck</u> wird unendlich klein („<u>charakteristisches Dreieck</u>“), aber es <u>bleibt erhalten!</u> Wir betrachten es quasi mit einer „<u>Unendlichkeitslupe</u>“ (vgl. 6.2).</p> <p>Die Steigung bleibt – mit der Hypotenuse im unendlich kleinen Sekantendreieck – sichtbar.</p> <p>Die Hypotenuse ist Teil der Tangente <i>und</i> der Kurve. Da das Dreieck erhalten bleibt, kann deren Steigung mit Hilfe der infinitesimalen Zahlen <u>exakt berechnet</u> werden.</p> <p>Es ergibt sich eine finite Zahl, deren reeller Anteil (Standardteil) die gesuchte momentane Änderungsrate liefert.</p>	<p>simalen Zugangs in deren <u>besonderer Anschaulichkeit</u> und der zugrunde liegenden <u>fundierten Arithmetik</u>.</p> <p>Im <i>Standard-Zugang</i> nähern sich die Hypotenusen von immer kleiner werdenden</p>  <p><u>Sekantendreiecken</u> in einem unendlichen Prozess der Kurve und <u>verschwinden</u> schließlich – nicht mehr sichtbar und daher oft schwer nachvollziehbar – im Berührungspunkt der Tangente. Die Anschauung geht verloren. Beim Grenzwertprozess „streben“ <math>\Delta x</math> (und <math>\Delta y</math>) „gegen 0“ und somit „<u>strebt</u>“ der <u>Differenzenquotient</u> <math>\frac{\Delta y}{\Delta x}</math> <u>gegen die Steigung der Tangente</u>.</p> <p>Dass der am Ende des Prozesses ermittelte Grenzwert die gesuchte momentane Änderungsrate angibt, ist für die Schülerinnen und Schüler oft auch deshalb schwer nachvollziehbar, weil der Prozess</p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Das vorgestellte Verfahren zur Berechnung der momentanen Änderungsrate lässt sich auf viele weitere Beispiele anwenden und <u>verallgemeinern</u> für eine beliebige Stelle <math>x</math>:</p> <p>Aufgabe: Bestimme die Steigung (momentane Änderungsrate) an einer beliebigen Stelle des Graphen von <math>f(x) = x^2</math>.</p> <p>Bestimmung der Tangentensteigung im charakteristischen Dreieck:</p> $\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{2x dx + (dx)^2}{dx} \\ &= 2x + dx \end{aligned}$ <p>Bestimmung der Steigung (der momentanen Änderungsrate) mit infinitesimalem <math>dx</math>: <math>2x + dx \simeq 2x</math>, wobei das Zeichen <math>\simeq</math> „infinitesimal benachbart zu“ bedeuten soll, d.h. „gleich bis auf einen unendlich kleinen Unterschied“.</p>	<p>den Wert nicht erreicht.</p> <p>Das Beispiel dient Übungszwecken. Zugleich soll es durch die hier vorgenommene Gegenüberstellung verdeutlichen, dass sich bei aller Unterschiedlichkeit im Denken die Rechnungen im <i>Standard-Zugang</i> und im <i>Nichtstandard-Zugang</i> doch sehr ähneln.</p> <p>Bekanntes Vorgehen aus der <i>Standardanalysis</i>: Bestimmung des Differenzenquotienten:</p> $\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x \end{aligned}$ <p>Bildung des Grenzwertes: <math>\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x</math>.</p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Mit dem bisher Gesagten ergeben sich folgende <u>Definitionen</u>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Für infinitesimales <math>dx \neq 0</math> heißt der Bruch <math>\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}</math> ein <u>Differentialquotient</u> von <math>f</math>.</li> <li>• Wenn es zu einer Funktion <math>f</math> und einer Stelle <math>x</math> eine reelle Zahl <math>a</math> gibt, so dass für jedes infinitesimale <math>dx \neq 0</math> immer gilt: <math>\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq a</math>, so heißt <math>a</math> die <u>Ableitung</u> von <math>f</math> an der Stelle <math>x</math>, in Zeichen: <math>f'(x) = a</math>.</li> </ul> <p>Wir können auch sagen:</p> <p>Die Ableitung von <math>f</math> an der Stelle <math>x</math> ist der reelle Teil (Standardteil) des Differentialquotienten an der Stelle <math>x</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Funktion <math>f'</math>, die jedem <math>x</math> die Ableitung von <math>f</math> zuordnet, also <math>f' : x \mapsto f'(x)</math>, heißt <u>Ableitungsfunktion</u> von <math>f</math>, oder – wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind – kurz: Ableitung von <math>f</math>.</li> </ul>	<p>Hier wird der Unterschied deutlich erkennbar:</p> <p>In der <i>Standardanalysis</i> ist der Differentialquotient (oder synonym die Ableitung) der Grenzwert des Differenzenquotienten.</p> <p>In der <i>Nichtstandard-Analysis</i> dagegen kommt der Differentialquotient eigenständig ins Spiel. Dessen reeller Teil (Standardteil) ist dann die Ableitung.</p>
<p><i>Ableitungsregeln</i></p> <p>Je nach Niveau (GK oder LK) werden unterschiedliche Funktionsklassen behandelt, so dass auch entsprechende Ableitungsregeln bewiesen und angewandt werden.</p> <p>Beweise der Ableitungsregeln:</p> <p><u>Vorbemerkung:</u></p> <p>Im Folgenden wird verwendet:  <math>df = f(x + dx) - f(x)</math> und</p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 4</i></p> <p>Bei diesen Beweisen sei nochmals darauf hingewiesen, dass sie sich rein formal nicht von denjenigen in der <i>Standard-Analyse</i></p>

Unterrichtsgang Ableitung	Kommentar
<p> <math>dg = g(x + dx) - g(x)</math> sowie <math>f'(x) \simeq \frac{df}{dx}</math> und <math>g'(x) \simeq \frac{dg}{dx}</math>.         </p> <p>Außerdem wird die Differenzierbarkeit der Funktionen <math>f</math> und <math>g</math> vorausgesetzt.</p> <p><b>a) Faktorregel</b> (Ableitung von <math>(c \cdot f)(x)</math>)</p> $\frac{(c \cdot f)(x+dx) - (c \cdot f)(x)}{dx} = \frac{c \cdot f(x+dx) - c \cdot f(x)}{dx}$ $= c \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \simeq c \cdot f'(x),$ <p style="text-align: center;">also <math>(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)</math>.</p> <p><b>b) Summenregel</b> (Ableitung von <math>(f + g)(x)</math>)</p> $\frac{(f+g)(x+dx) - (f+g)(x)}{dx}$ $= \frac{f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x)}{dx}$ $= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx}$ $\simeq f'(x) + g'(x),$ <p style="text-align: center;">also <math>(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)</math>.</p> <p><b>c) Potenzregel</b> (Ableitung von <math>f(x) = x^n</math>)</p> <p>Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt</p> $\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} =$ $= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} dx + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (dx)^2 + \dots + (dx)^n - x^n}{dx}$ $= n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot dx + \dots + (dx)^{n-1}$ $\simeq n \cdot x^{n-1},$ <p style="text-align: center;">also <math>(x^n)' = n \cdot x^{n-1}</math>.</p>	<p> <i>sis</i> unterscheiden, aber hier werden die Differentialquotienten <u>berechnet</u>, ohne propädeutische Grenzwertprozesse zu betrachten.         </p>

<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p><b>d) Produktregel</b> (Ableitung von <math>(f \cdot g)(x)</math>)</p> $\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x+dx) - (f \cdot g)(x)}{dx} &= \frac{f(x+dx) \cdot g(x+dx) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \frac{(f(x)+df) \cdot (g(x)+dg) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg + df \cdot g(x) + df \cdot dg - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= f(x) \cdot \frac{dg}{dx} + g(x) \cdot \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \cdot df \\ &\simeq f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x), \end{aligned}$ <p>da der letzte Summand <math>g'(x) \cdot df</math> infinitesimal ist. Also</p> $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$	<p>Der Beweis der Produktregel kommt hier ohne die trickreiche(?) „Nulladdition“ aus, die in der <i>Standardanalysis</i> üblicherweise verwendet wird. Hier kommt vielmehr die in der <i>Nichtstandard-Analysis</i> besonders anschauliche Deutung der Stetigkeit zum Tragen, die zu einer wesentlichen Vereinfachung der Beweisführung führt.</p>
<p><b>e) Kettenregel</b> (Ableitung von <math>(f(g(x)))</math>)</p> $\begin{aligned} \frac{f(g(x+dx)) - f(g(x))}{dx} &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x), \end{aligned}$ <p>also</p> $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$	<p>Als einzigen mathematischen Kniff benötigt man beim <i>Nicht-Standard-Unterrichtsgang</i> an dieser Stelle die Multiplikation mit <math>1 = \frac{dg}{dg}</math>, was in der <i>Standard-Analysis</i> gar nicht möglich ist.</p>
<p><b>f) Quotientenregel</b> (Ableitung von <math>(\frac{f}{g})(x)</math>):</p> <p>Sie ergibt sich aus der Produktregel, der Potenzregel und der Kettenregel.</p> <p>Wegen <math>(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}</math> gilt:</p>	<p>Natürlich lässt sich die Quotientenregel auch „zu Fuß“, ausgehend vom zugehörigen Differentialquotienten, beweisen.</p>

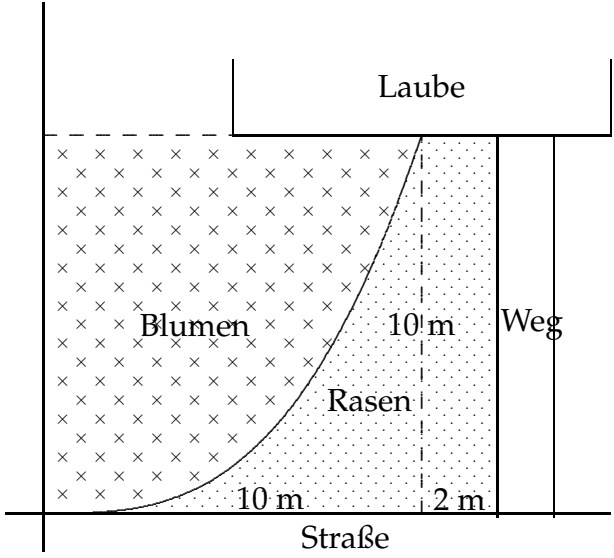


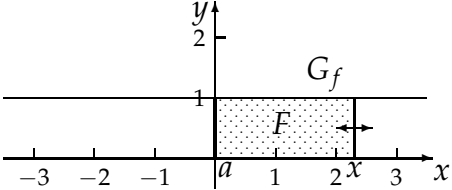
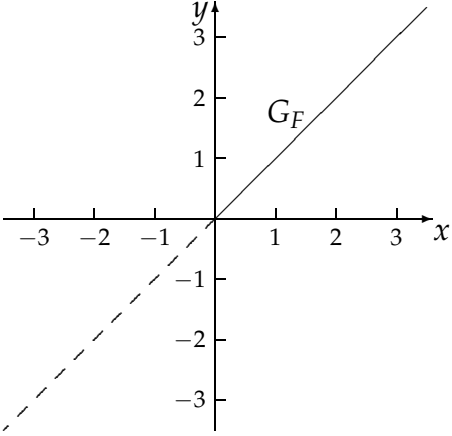
<i>Unterrichtsgang Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
$\begin{aligned} & \left(\frac{f}{g}\right)'(x) \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot ((g(x))^{-1})' \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$ <p><i>Funktionsuntersuchungen, Anwendungen der Differentialrechnung</i></p> <p>Wie gewohnt.</p>	<p><i>Folgende Unterrichtsabschnitte</i></p> <p>Im weiteren Verlauf der Differentialrechnung unterscheidet sich der hier vorgestellte <i>Nicht-Standard-Unterricht</i> nicht vom <i>Standard-Verlauf</i>.</p>

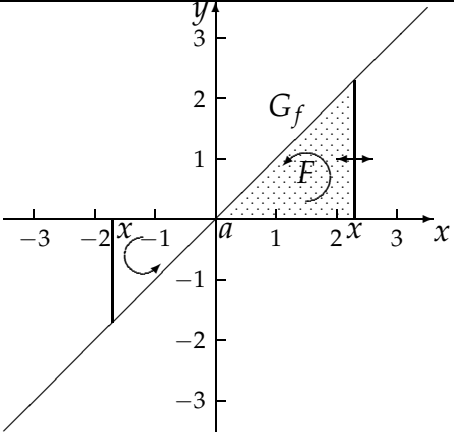
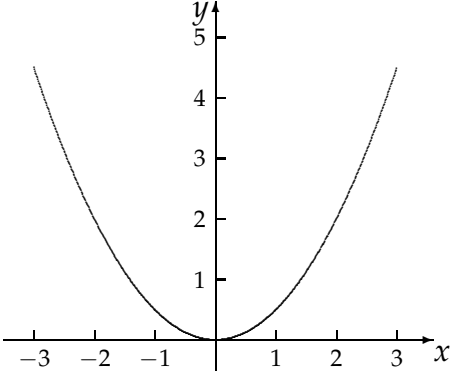
## 2.2 Einstieg in die Integralrechnung [Ba]

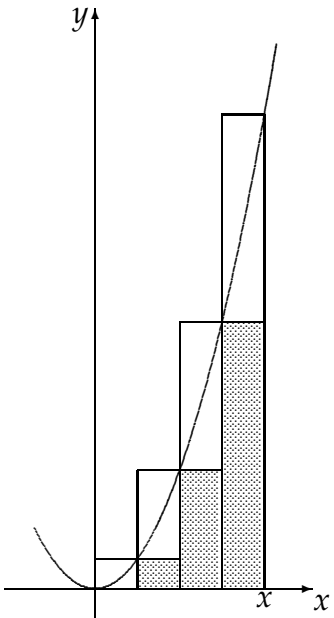
Der folgende Unterrichtsgang zur Einführung des Integrals ist elementar aufgebaut und geht, mit den bekannten Flächeninhalten geradlinig begrenzter Flächen im Koordinatensystem beginnend, Schritt für Schritt voran. Seine Intention ist es, in dieser Weise den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu erreichen. Mit dem Hauptsatz endet der Unterrichtsgang und der Analysisunterricht geht wie gewohnt weiter.

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p><i>Einführende Aufgabe</i></p> <p><i>Gerhard und Isolde F. besitzen am Stadtrand einen Schrebergarten. Sie möchten die Fläche zwischen der Eingangsseite des Grundstücks und der Laube neu gestalten, indem sie für den einen Teil ein Blumenbeet vorsehen und für den anderen eine Rasenflä-</i></p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 1</i></p> <p>Jede Lehrerin und jeder Lehrer hat sicherlich ein eigenes Beispiel mit „Anwendungsbezug“, das eingesetzt werden kann. Es ist aber durchaus erlaubt,</p>

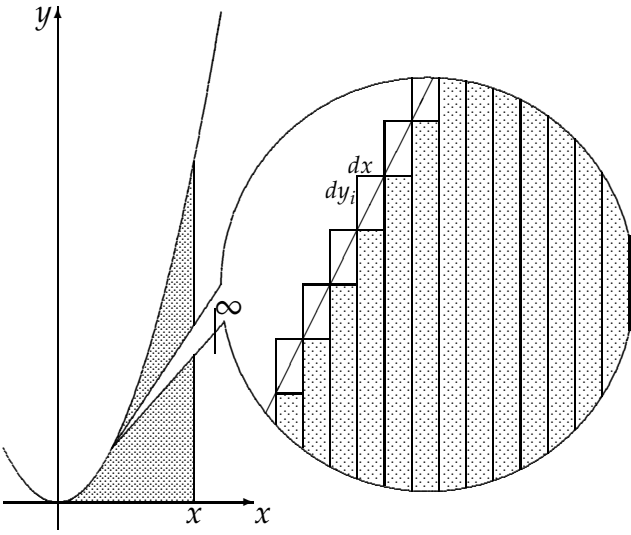
Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
<p data-bbox="242 385 880 645"><i>che. Als Mathematiklehrerin hat Isolde vorgeschlagen, die Trennlinie solle eine Kurve sein, die dem Graphen der kubischen Funktion <math>f(x) = x^3</math> entspricht (siehe Skizze). Um abschätzen zu können, wieviel m<sup>2</sup> Rollrasen sie kaufen müssen, müssen sie den Flächeninhalt der Rasenfläche herausfinden.</i></p> <p data-bbox="242 689 880 801">Hinweis: Die Maße sind der Skizze zu entnehmen, das Koordinatensystem wähle man geeignet, die Länge 10 m sei eine Einheit.</p> <p data-bbox="242 846 347 878">Skizze:</p>  <p data-bbox="242 1496 880 1720">Die Schwierigkeit besteht darin, dass der eine Rand der Rasenfläche eine Kurve ist. Es ist „neu“ zu denken, weshalb die Berechnung von Flächeninhalten zunächst an einfachen Beispielen in Erinnerung gerufen werden muss.</p> <p data-bbox="242 1765 880 1832"><i>Inhalte von geradlinig begrenzten Flächen</i></p> <p data-bbox="242 1881 880 1982">Wäre der Rand gerade, wäre die Größe der Rasenfläche leicht zu berechnen, gleich, wie lang diese Kante wäre und wo sie verlief.</p>	<p data-bbox="906 385 1289 488">das Flächeninhaltsproblem innermathematisch zu motivieren.</p> <p data-bbox="906 846 1289 1182">Die Aufgabe und die mit ihr verbundene Problematik wird <b>genauso behandelt wie im Standardunterricht</b>. Im vierten Unterrichtsabschnitt (S. 25) werden unendlich große hyperreelle Zahlen auftauchen (vgl. 2.3).</p> <p data-bbox="906 1496 1289 1720">Möglicherweise erinnern sich Schülerinnen und Schüler daran, wie man die Formel für den Kreisinhalt herausgefunden hat.</p> <p data-bbox="906 1765 1289 1809"><i>Unterrichtsabschnitt 2</i></p> <p data-bbox="906 1881 1289 1982">Für das folgende ist es zweckmäßig, die Graphiken mit gleichen Maß-</p>

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar																
<p>Es soll zunächst herausgefunden werden, nach welchen Regeln sich der Inhalt einer Fläche verändert, wenn man ihren Rand verschiebt und damit ihre Größe ändert.</p> <p>Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion <math>f(x) = 1</math> und der <math>x</math>-Achse soll bestimmt werden. Die Länge einer Seite wird dabei variiert. Dafür soll die <i>obere Grenze</i> <math>x</math> variabel sein, die <i>untere Grenze</i> sei fest bei <math>a = 0</math>.</p>  <table border="1" data-bbox="400 1137 874 1214"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>-1</td> <td>-2</td> <td>-3</td> </tr> <tr> <td><math>F(x)</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>-1</td> <td>-2</td> <td>-3</td> </tr> </table>  <p>Auf entsprechende Weise erhält man aus der Funktion <math>f(x) = x</math> als Flächeninhaltsfunktion <math>F(x) = \frac{1}{2}x^2</math>.</p>	$x$	0	1	2	3	-1	-2	-3	$F(x)$	0	1	2	3	-1	-2	-3	<p>stäben untereinander anzuordnen. Das erleichtert den Blick für die Zusammenhänge. Die Wertetabelle sollte dazwischen angeordnet werden.</p> <p>Der Kürze halber beschränken wir uns auf positive <math>x</math> und positive Flächeninhalte. Hier an diese elementare Stelle aber passt gut eine Behandlung der Vorzeichenregel, auf die die negativen Werte in der Wertetabelle und Orientierungspfeile in Flächen hinweisen.</p>
$x$	0	1	2	3	-1	-2	-3										
$F(x)$	0	1	2	3	-1	-2	-3										

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar																
 <table border="1" data-bbox="327 846 802 936"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>-1</td> <td>-2</td> <td>-3</td> </tr> <tr> <td><math>F(x)</math></td> <td>0</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>2</td> <td><math>\frac{9}{2}</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>2</td> <td><math>\frac{9}{2}</math></td> </tr> </table>  <p data-bbox="244 1368 767 1406"><i>Flächeninhalt unter einer Parabel</i></p> <p data-bbox="244 1451 882 1641">Nun soll eine Funktion für den Flächeninhalt zwischen der Parabel und der <math>x</math>-Achse ermittelt werden. Weil aber die Flächen einen krummen Rand haben, sind neue Überlegungen notwendig.</p> <p data-bbox="244 1832 882 1955">Zur Vereinfachung wird vom Faktor <math>\frac{1}{2}</math> abgesehen und zur Parabel mit der Funktion <math>f(x) = x^2</math> übergegangen.</p>	$x$	0	1	2	3	-1	-2	-3	$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	<p data-bbox="906 1368 1265 1406"><i>Unterrichtsabschnitt 3</i></p> <p data-bbox="906 1451 1289 1641">Hier besteht die Möglichkeit, verschiedene Verfahren sowie mögliche Vor- und Nachteile zu diskutieren:</p> <p data-bbox="906 1648 1289 1832">Annäherung des Flächeninhalts mit Rechtecken oder Trapezen, Einschachtelung „von oben“ oder „von unten“.</p> <p data-bbox="906 1839 1289 1984">Über das weitere Vorgehen wäre nun mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren.</p>
$x$	0	1	2	3	-1	-2	-3										
$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$										

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Eine Annäherung an den gesuchten Flächeninhalt kann mit Rechtecken auf zwei Arten erfolgen.</p> <p>Im ersten Fall überdecken die Rechtecke die Parabel (<i>Obersumme</i>), ihr Flächeninhalt ist größer als der gesuchte.</p> <p>Im anderen Fall liegen die Rechtecke vollständig unterhalb der Parabel (<i>Untersumme</i>), ihr Flächeninhalt ist mit Sicherheit zu klein. Wegen der Krümmung der Parabel kann der Flächeninhalt auch nicht gleich dem arithmetischen Mittel der Rechtecksummen sein.</p> 	<p>Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Fläche mit Trapezen auszufüllen, was aber auf denselben Term für den Flächeninhalt führt.</p> <p>Hier wird die Berechnung bis zur variablen oberen Grenze <math>x</math> gezeigt. Je nach Unterrichtssituation kann auch die obere Grenze fest, zum Beispiel bei 1, gewählt werden, um zunächst die Struktur des entstehenden Terms verständlicher zu machen und Zahlenwerte ausrechnen zu können. Aus dem gleichen Grund sollte die Strecke zwischen unterer und oberer Grenze zunächst in vier gleich große Intervalle zerlegt werden.</p> <p>Diese Anzahl sollte man dann schrittweise auf 8, 100 usw. erhöhen, damit die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie sich der Term dabei verändert. Am Ende wird eine infinite Anzahl <math>N</math> eingesetzt.</p>

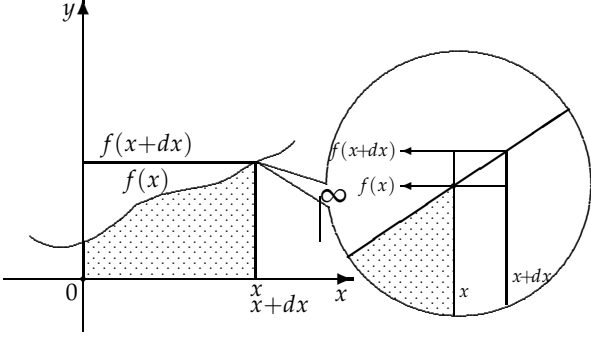
<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Der Zeichnung kann man entnehmen, dass sich <i>Untersumme</i> und <i>Obersumme</i> nur um einen Rechtecksinhalt unterscheiden, denn man kann die drei schattierten Rechtecke der <i>Untersumme</i> nach links verschieben und dann mit einem vierten Rechteck ergänzen.</p> <p>Berechnung der Rechtecksummen mit der Einteilung des Intervalls <math>[0; x]</math> in vier Teile (Brüche zweckmäßigerweise nicht kürzen):</p> <p>Untersumme:  <math display="block">F_{u_4} = \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{2}{4}x\right)^2 + \frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2</math> <math display="block">= \dots</math> <math display="block">= \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^3 i^2</math></p> <p>Obersumme:  <math display="block">F_{o_4} = \dots = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) =</math> <math display="block">\frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^4 i^2</math></p> <p><i>Erhöhung der Anzahl an Rechtecken und Berechnung des Flächeninhalts</i></p> <p>Die Frage, was getan werden kann, um den Fehler in der Berechnung zu verkleinern, führt auf Zwischenschritte mit feinerer Unterteilung des Intervalls <math>[0; x]</math>, z.B. mit <math>n = 8</math> oder <math>n = 100</math>.</p>	<p>Sowohl für die Termumformungen als auch für den Umgang mit der Summenschreibweise sollte genügend Zeit eingeplant werden.</p> <p>Die Summenschreibweise und wie sie auszusprechen ist, ist in der Regel noch nicht bekannt. Eine der beiden Rechnungen ist eine geeignete Hausaufgabe.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 4</i></p> <p>Die Erhöhung der Anzahl der Rechtecke dient der Übung zum Verständnis des Rechentems.</p> <p>Wie sich eine feinere Unterteilung auf die Terme für Unter- und Obersumme auswirkt, finden Schülerinnen und Schüler nach kurzer Überlegung selbst heraus.</p>

Unterrichtsgang Integralrechnung	Kommentar
<p data-bbox="320 376 954 450">Danach tritt die Frage auf, ob man den Fehler zum Verschwinden bringen kann.</p> <p data-bbox="320 723 954 831">„Die Intervalle müssten unendlich schmal sein. Dann hat man aber unendlich viele Intervalle.“</p> <p data-bbox="320 913 954 987">Um dies sichtbar zu machen, ist der Graph mit einem infiniten Faktor zu vergrößern.</p> 	<p data-bbox="986 376 1361 483">Hier besteht <b>erstmal (!) ein Unterschied zum Standardunterricht.</b></p> <p data-bbox="986 490 1361 714">Der Vorteil ist, dass die Schülerinnen und Schüler das machen dürfen, was sie intuitiv fordern: unendlich viele unendlich schmale Rechtecke.</p> <p data-bbox="986 721 1361 869">Derartige Vorschläge kommen in der Regel von den Schülerinnen und Schülern.</p> <p data-bbox="986 913 1361 1137">Die Lehrerin oder der Lehrer hat hier die Möglichkeit, an die Fachbegriffe zu erinnern: Die Breite der Rechtecke ist <i>infinitesimal</i>, ihre Anzahl <i>infini</i>t.</p> <p data-bbox="986 1220 1361 1839">Die Unendlichkeitslupe <math> \infty</math> zeigt an, dass mit einem infiniten Faktor vergrößert wird. <b>Diese mathematisch legitimierte (Teil II, 6.1) Möglichkeit bietet der Standardunterricht nicht.</b> Mit dieser Möglichkeit der infiniten Vergrößerung kommt man nun schnell zum Hauptsatz der Analysis: Es wird die (infinite) Untersumme berechnet und anschließend nachgewiesen, dass die</p>

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Die Quadratfunktion und somit auch die Rechtecksummen für die Unterteilung des Intervalls in infinit viele Rechtecke (Anzahl <math>N</math>) mit infinitesimaler Breite sind nun hyperreell zu denken:</p> <p>Untersumme:  <math display="block">F_{u_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2)</math> <math display="block">= \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} i^2</math></p> <p>Für die Summe der ersten <math>n</math> Quadratzahlen gibt es eine Schreibweise als Produkt:</p> $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$ <p>Dieser Zusammenhang gilt auch im Unendlichen.</p> <p>Umwandlung der Untersumme in Produktschreibweise und Umformungen:</p> $F_{u_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (N-1) \cdot N \cdot (2N-1)$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{2N-1}{N}$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{N}\right)$ <p>Hiervon ist der reelle Teil (Standardteil) zu bilden, den wir ab jetzt mit <math>rt</math> bezeichnen.</p> $rt(F_{u_N}) = rt\left(\frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{N}\right)\right)$ $= \frac{1}{3} \cdot x^3$ <p>Dies ist eine Funktion dritten Grades, allerdings ist noch zu klären, wie groß die Fläche unter der Parabel ist, die von den Rechtecken nicht abgedeckt wird.</p> <p>Der unvergrößerten Zeichnung der Parabel (S. 23) wurde entnommen, dass sich Unter- und Obersumme nach der Verschiebung nur</p>	<p>verbleibende Restfläche infinitesimal ist. Mögliche Alternativen werden in der Kommentarspalte angedeutet.</p> <p>Für die Obersumme erhält man</p> $F_{o_N} = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + N^2)$ $= \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^N i^2$ <p>Auf einen Beweis dieser Formel (z.B. mittels vollständiger Induktion) sollte hier verzichtet werden. Denkbar sind aber Überprüfungen mit <math>n = 2</math> bis <math>n = 5</math>.</p> <p>Achtung!</p> <p>Für die Untersumme ist die Formel umzudenken. Auch für die Obersumme erhält man als reellen Teil (Standardteil)</p> $rt(F_{o_N}) = \frac{1}{3} \cdot x^3.$ <p>Damit ist die Flächeninhaltsfunktion <b>errechnet</b>.</p> <p>Auch die „dreieckigen“ Differenzflächen zwischen Rechtecken und</p>



<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>								
<p>um ein Rechteck unterscheiden. (Es ist genauso groß wie die Summe aller einzelnen Differenzrechtecke.)            Sein Flächeninhalt beträgt <math>A_{\text{Diff-R}} = f(x) \cdot dx</math>.            Dieses Produkt ist infinitesimal, denn <math>dx</math> ist infinitesimal und <math>f(x)</math> reell.            Damit gibt der reelle Standardteil der Ober-            summe (bzw. der Untersumme) den reellen            Flächeninhalt richtig wieder: <math>F(x) = \frac{1}{3}x^3</math>.</p> <p><i>Zusammenfassung aller Flächeninhalts-            funktionen, Hauptsatz der Analysis</i></p>	<p>Kurve sind, da sie kleiner            sind, infinitesimal.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 5</i></p>								
<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="311 878 576 920">Randfunktion <math>f</math></th> <th data-bbox="576 878 960 920">Flächeninhaltsfunktion <math>F</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="311 920 576 958"><math>f(x) = 1</math></td> <td data-bbox="576 920 960 958"><math>F(x) = x</math></td> </tr> <tr> <td data-bbox="311 958 576 996"><math>f(x) = x</math></td> <td data-bbox="576 958 960 996"><math>F(x) = \frac{1}{2}x^2</math></td> </tr> <tr> <td data-bbox="311 996 576 1034"><math>f(x) = x^2</math></td> <td data-bbox="576 996 960 1034"><math>F(x) = \frac{1}{3}x^3</math></td> </tr> </tbody> </table>	Randfunktion $f$	Flächeninhaltsfunktion $F$	$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	
Randfunktion $f$	Flächeninhaltsfunktion $F$								
$f(x) = 1$	$F(x) = x$								
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$								
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$								
<p>Es scheint so zu sein, dass die Randfunktion            gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunk-            tion ist.            Oder umgekehrt: Man findet zu einer Funk-            tion <math>f</math> die Flächeninhaltsfunktion <math>F</math>, indem            man das Ableiten der Funktion <math>f</math> „rückwärts            vornimmt“.            Gelten diese beiden Zusammenhänge im-            mer? Falls ja, dann sind sie zu beweisen.            Es gibt unendlich viele solcher Funktionen,            von denen <math>f</math> als Ableitung „abstammen“            kann, denn zum Beispiel ist die Funktion mit  <math>f(x) = x^2</math> auch die Ableitung von <math>F(x) =</math>  <math>\frac{1}{3}x^3 + 53</math>. Alle solche <i>Stammfunktionen</i> kön-            nen sich nur in einem konstanten Summan-            den unterscheiden, der beim Ableiten weg-            fällt. Welche soll man nehmen?            Die obere Grenze soll von nun ab nicht mehr  <math>x</math>, sondern <math>b</math> genannt werden.            Mit der errechneten Stammfunktion <math>F(x) =</math>  <math>\frac{1}{3}x^3</math> kann man den Flächeninhalt <i>unter der Pa-            rabel</i> z.B. zwischen <math>a = 0</math> und <math>b = 4</math> direkt            angeben. Man erhält <math>F(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 = \frac{64}{3}</math> Flä-            cheneinheiten (FE).</p>	<p>Der Begriff „Stammfunkti-            on“ kann hier anschaulich            eingeführt werden.</p>								

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Wenn die untere Grenze nicht bei null liegt, sondern z.B. bei <math>a = 2</math>, dann berechnet man die Differenz zweier Flächeninhalte, nämlich <math>F(4) - F(2) = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}</math> (FE).          Hier wird erkennbar, dass jede Stammfunktion geeignet ist, den Flächeninhalt zu berechnen, denn beim Bilden der Differenz fällt ein konstanter Summand wieder heraus.          Der Flächeninhalt wird <i>Integral</i> genannt, weil man unendlich viele infinitesimale Rechteckinhalte zusammenfasst (<i>integriert</i>).          Historisch hat sich eine bestimmte Schreibweise für Integrale entwickelt. Man schreibt z.B. für die Obersumme</p> $\int_a^b x^2 dx = \text{rt} \left( \sum_{i=1}^N x^2 dx \right)$ <p>und spricht (für die linke Seite):          „Integral von <math>f(x) = x^2</math> zwischen <math>a</math> und <math>b</math>.“</p> <p><b>Hauptsatz der Analysis</b></p> <p>1. Die Randfunktion <math>f</math> ist gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion <math>F</math>, die den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von <math>f</math> und der <math>x</math>-Achse beschreibt:  <math>f(x) = F'(x)</math>.</p> <p>2. Der Inhalt der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen, der <math>x</math>-Achse, der unteren Grenze <math>a</math> und der oberen Grenze <math>b</math> ist gleich der Differenz der Funktionswerte an den Stellen <math>b</math> und <math>a</math> einer Stammfunktion von <math>f</math>:  <math>\int_a^b f(x) dx = \text{rt} \left( \sum_{i=0}^N f(x_i) dx \right) = F(b) - F(a)</math>.</p> 	<p>Auch andere Sprechweisen sind durchaus üblich.</p> <p><b>Skizze</b> zum Hauptsatz, Teil 1 (s. auch S. 92 !)</p>

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p><b>Beweis Teil 1</b> (s. auch S. 92 !)</p> <p>An irgendeiner Stelle <math>x</math> des Intervalls besitze der Flächeninhalt den Wert <math>F(x)</math>. Verschiebt man nun die obere Grenze um ein infinitesimales <math>dx</math>, so ändert sich der Flächeninhalt zu <math>F(x + dx)</math>. Die Veränderung beträgt also <math>F(x + dx) - F(x)</math>.</p> <p>Mit infinitesimalem <math>dx</math> ist, genau wie der tatsächliche Flächenzuwachs, auch der Inhalt eines hinzuzufügenden Näherungsrechtecks infinitesimal: <math>f(x) \cdot dx</math>. Der verbleibende Unterschied zur tatsächlichen Fläche ist maximal ein Rechteck, von dem beide Seitenlängen <math>dx</math> und <math>dy</math> infinitesimal sind (<math>dy</math> kann positiv oder negativ sein).</p> <p>Also gilt</p> $F(x + dx) - F(x) \simeq f(x) \cdot dx + dy \cdot dx = (f(x) + dy) \cdot dx.$ <p>Division durch <math>dx</math> ergibt</p> $\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \simeq f(x) + dy.$ <p>Mit dem Übergang zum reellen Teil (Standardteil) erhält man</p> $F'(x) = f(x).$ <p><b>Beweis Teil 2:</b></p> <p>Sei <math>F_a</math> die spezielle Stammfunktion von <math>f</math>, die den Flächeninhalt <math>\int_a^b f(x) dx</math> richtig beschreibt, dass also gilt</p> $F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x) dx.$	<p><i>Der Beweis des Hauptsatzes ist in der Nichtstandard-Analysis einfach und kurz.</i></p> <p>Variante mit Einschachtelung des Zuwachses: Es gilt (z.B. für monoton wachsende Funktionen)</p> $f(x) \cdot dx \leq F(x + dx) - F(x) \leq f(x + dx) \cdot dx.$ <p>Division durch <math>dx</math> ergibt</p> $f(x) \leq \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \leq f(x + dx),$ <p>wovon der reelle Teil (Standardteil) zu bilden ist. Weil dieser für <math>f(x)</math> und <math>f(x + dx)</math> übereinstimmt, folgt die Gleichheit. In der Mitte steht der reelle Teil (Standardteil) des Differentialquotienten der Flächeninhaltsfunktion, also ihre Ableitung.</p>

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Zur Beschreibung ist aber jede andere Stammfunktion <math>F</math> genauso geeignet, denn sie kann sich von <math>F_a</math> nur um eine konstante Funktion <math>C</math> unterscheiden, da nur konstante Funktionen beim Ableiten wegfallen: <math>C'(x) = 0</math>. Wegen <math>C(b) - C(a) = 0</math> ergibt sich dann</p> $F(b) - F(a) = (F_a + C)(b) - (F_a + C)(a)$ $= F_a(b) + C(b) - (F_a(a) + C(a))$ $= F_a(b) + C(b) - F_a(a) - C(a) = F_a(b) - F_a(a).$ <p>Also gilt <math>F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx</math>.</p> <p><i>Lösung des Eingangsproblems</i></p> <p>Mit Hilfe eines Integrals kann also nun der Inhalt der Fläche mit gekrümmtem Rand berechnet werden.</p> <p>Die gesamte Fläche besteht aus einem „Dreieck“, dessen eine Seite vom Graphen von <math>f(x) = x^3</math> gebildet wird, und einem Rechteck.</p> <p>Der Ursprung des Koordinatensystems sei in der Grundstücksecke an der Straße, die <math>x</math>-Achse die Grundstücksgrenze zur Straße.</p> <p>Mit der Vorgabe 10 m für 1 Einheit geht der Graph offenbar durch die Punkte <math>(0;0)</math> und <math>(1;1)</math>.</p> <p>Es ist also das Integral <math>\int_0^1 x^3 dx</math> zu berechnen. Man erhält damit für die dreieckige Fläche den Inhalt</p>	<p><i>Unterrichtsabschluss</i></p>

<i>Unterrichtsgang Integralrechnung</i>	<i>Kommentar</i>
<p> <math>A_1 = \int_0^1 x^3 dx = [\frac{1}{4}x^4]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}</math>, also <math>\frac{1}{4}</math> Flächeneinheiten. </p> <p> Eine Flächeneinheit entspricht <math>10\text{m} \cdot 10\text{m} = 100\text{m}^2</math>. </p> <p> Damit beträgt der Anteil der Fläche mit dem krummen Rand <math>\frac{1}{4} \cdot 100\text{m}^2 = 25\text{m}^2</math>. </p> <p> Die rechteckige Fläche ist <math>2\text{m} \cdot 10\text{m} = 20\text{m}^2</math> groß. </p> <p> Somit beträgt die gesamte mit Rasen zu versehende Fläche <math>25\text{m}^2 + 20\text{m}^2 = 45\text{m}^2</math>. Es sind also mindestens <math>45\text{m}^2</math> Rollrasen zu kaufen. </p>	

Es folgt nun der übliche Unterricht zur Integralrechnung.

## 2.3 Arithmetik: Rechnen mit hyperreellen Zahlen

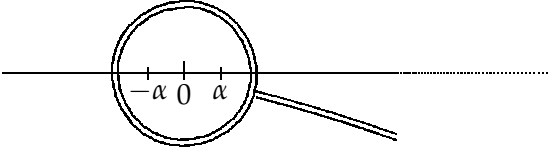
[Be]

Der folgende Unterrichtsgang beschreibt in knappen Formulierungen Schritt für Schritt die hyperreelle Arithmetik, soweit sie im Einstieg in die Analysis gebraucht wird. In dieser systematischen Weise wird man die Arithmetik kaum unterrichten. Eher wird man dort, wo der Bedarf entsteht, die arithmetischen Regeln erarbeiten und vielleicht auch lokal arithmetische Exkurse einbauen. Für beide Vorgehensweisen kann man auf den folgenden systematischen Unterrichtsgang zurückgreifen.

Der Weg beginnt bei den reellen Zahlen. Wir sehen, wie elementar der Aufbau der Theorie der hyperreellen Arithmetik ist – ganz im Gegensatz zur großen, ungelösten Problematik der Theorie der reellen Zahlen im Unterricht. Für Schülerinnen und Schüler braucht es in manchen Phasen dennoch manches Nachdenken, manches schriftliche oder gedankliche Experiment und die Diskussion. Zentral ist: Die hyperreelle Arithmetik kann und soll vollständig – ausgehend von gemeinsamen, expliziten *Vereinbarungen* – mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden. Besser: Sie entwickeln die *Theorie* selbst – mit der Assistenz der Lehrenden. Auch die Bezeichnungen für die neuen Zahlen sollten gemeinsam festgelegt werden, um den

Vorgang der *Konvention* deutlich zu machen. Im folgenden Unterrichtsgang machen wir bewährte Bezeichnungsvorschläge für die Typen von Zahlen, die wir am Ende begründen und in einer Tabelle zusammenfassen.

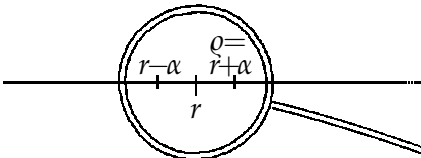
Beweise werden zum gemeinsamen *Anliegen*, da sie die *eigenen* arithmetischen Hypothesen in der *eigenen Theorie* begründen. Die Beweise im Unterrichtsgang enthalten den Kern der Gedankenführung in einfacher Sprache und Symbolik. Sie werden sich im Unterricht aber aus der Diskussion heraus anders, lebendiger und vielfältiger, gestalten. In einem Anhang geben wir ein Beispiel eines hypothetischen Unterrichtsgesprächs zum allerersten Beweis. Der Aufbau der hyperreellen Arithmetik ist ein interessantes Arbeitsfeld, für Lernende wie Lehrende.

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
<p data-bbox="244 898 852 938"><i>Einstieg: Was heißt „unendlich klein“?</i></p> <p data-bbox="244 981 879 1050"><i>Frage: Wie können wir jemandem erklären, was „unendlich klein“ bedeuten soll?</i></p> <p data-bbox="244 1211 879 1473"><i>Beispiele möglicher Äußerungen:</i>            Unendlich klein ist kleiner als alles.            Unendlich klein ist eine Strecke, die man nicht mehr sehen kann. Auch mit keiner noch so starken Lupe.            Aber vorstellen kann man sie sich, so, als wenn man eine <i>Unendlichkeitslupe</i> hätte.</p>  <p data-bbox="244 1778 879 1921">„Unendlich klein“ heißt „kleiner als jede Zahl“.            Ist <math>\alpha</math> eine unendlich kleine Zahl, dann liegt sie unendlich nah bei 0.</p>	<p data-bbox="906 898 1262 938"><i>Unterrichtsabschnitt 1</i></p> <p data-bbox="906 981 1281 1167">Die Idee „unendlich klein“ (<math>&gt; 0</math>) entsteht z.B. bei der Beobachtung der immer kleiner werdenden Sekantendreiecke in 2.1.</p> <p data-bbox="906 1211 1281 1547"><i>Anlässe für Diskussionen.</i>            Es genügt, zuerst nur über <i>positive</i> Zahlen zu sprechen, auch wenn sie unendlich klein sind.            In Teil II, 6.2 wird die Idee der infiniten Vergrößerung mathematisch legitimiert.</p> <p data-bbox="906 1778 1281 1883">Es genügt, über <i>positive</i> unendlich kleine Zahlen zu sprechen (s.o.).</p>

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
<p>„Unendlich klein“ ist nicht null, aber „kleiner als jede noch so kleine Zahl“.</p> <p><i>Vereinbarung:</i> Unendlich kleine positive Zahlen <math>\alpha</math> sind größer als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl <math>r</math>. Statt „unendlich klein“ sagen wir auch „infinitesimal“. Wir schreiben <math>\alpha \simeq 0</math>. Wir bezeichnen infinitesimale Zahlen mit <math>\alpha, \beta, \gamma</math> und oft auch mit <math>dx, dy, dz</math> usw.</p> <p>Unendlich kleine Zahlen können auch negativ sein.</p> <p><i>Vereinbarung:</i> Der Betrag <math> \alpha </math> unendlich kleiner Zahlen <math>\alpha</math> ist kleiner als jede positive reelle Zahl <math>r</math>. Wir schreiben <math>\alpha \simeq 0</math>.</p> <p>Ist 0 eine infinitesimale Zahl? „0 ist die ‚infinitesimalste‘ Zahl.“</p> <p><i>Vereinbarung:</i> 0 ist infinitesimal.</p> <p><i>Frage:</i> Gibt es unendlich kleine Zahlen? <i>Antwort:</i> Wir sind mutig und <i>erfinden</i> sie!</p> <p><i>Rechnen mit infinitesimalen Zahlen</i></p> <p><i>Frage:</i> Wie rechnen wir mit unendlich kleinen Zahlen? <i>Vereinbarung:</i> Wie mit gewöhnlichen Zahlen.</p>	<p><i>Definition:</i> <math>\alpha</math> heißt positiv infinitesimal, wenn gilt: <math>\alpha &gt; 0</math> und <math>\alpha &lt; r</math> für alle <math>r \in \mathbb{R}, r &gt; 0</math>.</p> <p>Wir machen durchgehend nur Bezeichnungsvorschläge.</p> <p>s. Abbildung</p> <p><i>Definition:</i> <math>\alpha</math> heißt infinitesimal, wenn gilt: <math> \alpha  &lt; r</math> für alle <math>r \in \mathbb{R}, r &gt; 0</math>.</p> <p>Diskussion! „0 ist kleiner als alle unendlich kleinen positiven Zahlen.“</p> <p>Es beginnt eine Theorie, die gemeinsam mit den SuS entwickelt wird.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 2</i></p>

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Wir addieren, multiplizieren, subtrahieren, dividieren sie miteinander und mit reellen Zahlen und ordnen die Terme. Beispiele von Termen und Ausdrücken:</p> $\alpha + \alpha, 3 \cdot \alpha, r + \alpha, n \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \beta, \alpha \cdot \alpha = \alpha^2, \frac{dy}{dx},$ $\alpha - \alpha = 0, \frac{\beta}{\beta} = 1, \alpha < \alpha + \beta.$ <p><i>Frage:</i> Wie groß ist <math>2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha</math>? Ist „infinitesimal + infinitesimal“ auch „infinitesimal“?</p> <p><i>Antwort:</i> <math>2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha</math> ist infinitesimal.</p> <p><i>Beweis:</i> <math>\alpha</math> ist kleiner als jedes <math>\frac{r}{2}</math>, denn <math>\frac{r}{2}</math> ist eine reelle Zahl. Also ist <math>2 \cdot \alpha &lt; r</math> für jedes <math>r</math>.</p> <p><i>Aussage:</i> Sind <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> infinitesimal, dann ist <math>\alpha + \beta</math> infinitesimal.</p> <p><i>Beweis:</i> Ist z.B. <math>\alpha &lt; \beta</math>, dann ist <math>\alpha + \beta &lt; 2 \cdot \beta</math>, also <math>\alpha + \beta</math> infinitesimal.</p> <p><i>Aussage:</i> <math>n \cdot \alpha</math> ist infinitesimal für jedes natürliche <math>n</math>.</p> <p><i>Beweis:</i> <math>\alpha</math> ist kleiner als jedes <math>\frac{r}{n}</math>, denn <math>\frac{r}{n}</math> ist eine reelle Zahl. Also ist <math>n \cdot \alpha &lt; r</math> für jedes <math>r</math>.</p> <p><i>Aussage:</i> <math>s \cdot \alpha</math> ist infinitesimal für jedes reelle <math>s</math>.</p> <p><i>Beweis:</i> Ist <math>s &lt; n</math>, so ist <math>s \cdot \alpha &lt; n \cdot \alpha</math>, also infinitesimal. (Oder so: <math>\alpha</math> ist kleiner als jedes <math>\frac{r}{s}</math>, denn <math>\frac{r}{s}</math> ist eine reelle Zahl. Also ist <math>s \cdot \alpha &lt; r</math> für jedes <math>r</math>.)</p> <p><i>Aussage:</i> Sind <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> infinitesimal, dann ist <math>\alpha \cdot \beta</math> infinitesimal.</p> <p><i>Beweis:</i> Da <math>\beta &lt; 1</math> ist, ist <math>\alpha \cdot \beta &lt; \alpha \cdot 1 = \alpha</math>, also infinitesimal.</p>	<p>Anschaulich ist das in 2.1 begründet (durch die infinite Vergrößerung der Verhältnisse auf der Zahlengeraden.)</p> <p>Hausaufgabe? Übung? Beweis aus der Praxis s. Anhang.</p> <p>Dieser Beweis könnte Hausaufgabe sein.</p>



Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	Kommentar
<p>Frage: Was ist <math>\varrho = r + \alpha</math>, wenn <math>r</math> eine reelle Zahl ist.</p> <p>Antwort: Keine reelle Zahl. <math>\varrho</math> ist eine <i>hyperreelle Zahl</i>, die <i>unendlich nah</i> bei <math>r</math> liegt.</p> <p>Wir schreiben: <math>\varrho \simeq r</math>.</p> <p><math>r</math> heißt <i>Standardteil</i> oder <i>reeller Teil</i> von <math>\varrho</math>.</p> 	<p>Begriffe <i>hyperreelle Zahl</i>, <i>unendlich nah</i>,</p> <p><i>Standardteil</i> ist math. Konvention, im Unterricht empfiehlt sich <i>reeller Teil</i>.</p>
<p>Um jede reelle Zahl <math>r</math> liegen unendlich viele unendlich nahe hyperreelle Zahlen <math>\varrho</math>.</p> <p>Alle zusammen bilden die <i>Monade</i> um <math>r</math>.</p>	<p>Begriff <i>Monade</i></p>
<p><i>Division:</i> <i>reelle Zahl durch infinitesimale Zahl</i></p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 3</i></p>
<p>Frage: Was passiert, wenn wir durch unendlich kleine Zahlen dividieren?</p> <p>Beispiel: Wie groß ist <math>\frac{1}{\alpha}</math>?</p> <p>Wir wissen: <math>\alpha</math> ist kleiner als jede positive reelle Zahl, d.h. <math>\alpha &lt; r</math> für alle <math>r \in \mathbb{R}^+</math>.</p> <p>Mit <math>r</math> ist auch <math>\frac{1}{r}</math> eine positive reelle Zahl. Also gilt auch <math>\alpha &lt; \frac{1}{r}</math> für alle <math>r \in \mathbb{R}^+</math> und damit durch Umformung <math>r &lt; \frac{1}{\alpha}</math> für alle <math>r</math>.</p>	<p><math>\alpha</math> sei durchgehend infinitesimal und positiv.</p>
<p>Entdeckung: <math>\frac{1}{\alpha}</math> ist größer als jede reelle Zahl: <math>\frac{1}{\alpha}</math> ist <i>unendlich groß</i>.</p>	<p><i>Infinite Zahlen</i></p>

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
<p data-bbox="244 454 882 533"><i>Frage:</i> Wie können wir ausdrücken, was „unendlich groß“ bedeutet?</p> <p data-bbox="244 685 738 763"><i>Beispiele:</i> Unendlich groß ist größer als alles.</p> <p data-bbox="244 801 882 987">Kann jemand eine unendlich große Zahl nennen? Unendlich groß ist eine Zahl, die man nicht auf der endlichen Zahlengeraden darstellen kann. Aber vorstellen kann man sie sich – im Unendlichen, so, als wenn man ein <i>Unendlichkeitsfernrohr</i> hätte.</p> <p data-bbox="244 1111 882 1223">Ist <math>\Omega</math> eine unendlich große Zahl, dann liegt sie unendlich weit entfernt von 1 und jeder noch so großen reellen Zahl <math>r</math>:</p> <div data-bbox="244 1245 818 1339" style="text-align: center;"> </div> <p data-bbox="244 1413 882 1753"><i>Vereinbarung:</i> Unendlich große positive Zahlen sind größer als alle positiven reellen Zahlen <math>r</math>. Statt „unendlich groß“ sagen wir auch „infinite“. Wir bezeichnen infinite Zahlen mit <math>A, B, N, \Gamma, \Omega</math>, manchmal auch mit <math>\mu, \nu</math> usw. <math>\Omega \gg 1</math> ist die Bezeichnung für „<math>\Omega</math> ist unendlich groß“.</p> <p data-bbox="244 1794 882 1917"><i>Aussage:</i> Für jedes reelle <math>s</math> ist <math>\frac{s}{\alpha}</math> unendlich groß. <i>Beweis:</i> <math>\frac{1}{\alpha}</math> ist größer als jedes <math>\frac{r}{s}</math>, denn <math>\frac{r}{s}</math> ist eine reelle Zahl. Also ist <math>\frac{s}{\alpha} &gt; r</math> für alle <math>r</math>.</p>	<p data-bbox="906 454 1289 685">Die Idee „unendlich groß“ entsteht, wenn es beim Integral um die Anzahl der Rechtecke unter einem Funktionsgraphen geht (s. 2.2).</p> <p data-bbox="906 723 1289 801">Neue Anlässe für Diskussionen.</p> <p data-bbox="906 992 1241 1025">„Unendlichkeitsfernrohr“</p> <p data-bbox="906 1111 1289 1178">Weiteres zu Veranschaulichungen s. 3.2.</p> <p data-bbox="906 1413 1289 1675"><i>Definition:</i> <math>\Omega</math> heißt „positiv infinit“, wenn gilt: <math>\Omega &gt; 0</math> und <math>\Omega &gt; r</math> für alle <math>r \in \mathbb{R}^+</math>. <i>Bezeichnungsvorschläge.</i> Zahlbezeichnungen im U. gemeinsam vereinbaren.</p>

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>				
<p><i>Aussage:</i> Ist <math>\Gamma</math> infinit, dann ist <math>\Gamma - s</math> infinit für jedes reelle <math>s</math>.</p> <p><i>Hinweis:</i> Es ist <math>\Gamma &gt; r</math> für alle reellen Zahlen. Also ist auch <math>\Gamma &gt; r + s</math>, also <math>\Gamma - s &gt; r</math> für alle <math>r</math>.</p> <p><i>Frage:</i> Gibt es eine kleinste positiv-unendliche Zahl?</p> <p><i>Aussage:</i> Ist <math>\Gamma</math> unendlich groß und ist <math>r</math> eine reelle Zahl, so ist <math>r \cdot \Gamma</math> unendlich groß.</p> <p><i>Rechnen mit hyperreellen Zahlen <math>{}^*\mathbb{R}</math></i></p> <p>Arithmetische Terme aus reellen, infinitesimalen und infiniten Zahlen sind <i>hyperreelle Zahlen</i> in <math>{}^*\mathbb{R}</math>.</p> <p><i>Beispiele:</i>  <i>Infinitesimale Zahlen <math>\alpha, \beta</math> wie oben.</i>  <i>Infinite Zahlen <math>A, \Lambda, \Omega</math> wie oben.</i>  <i>Reelle Zahlen <math>r, s, t, u</math>.</i>  <math>\varrho = r + \alpha</math>, eine hyperreelle Zahl unendlich nah zu <math>r</math>.          Wenn <math>s</math> reell ist und <math>B</math> infinit, was ist <math>B - s</math>?</p> <p>Diskutiere <i>weitere Beispiele</i> von additiven Kombinationen.</p> <p>Wir können diese <i>Typen hyperreeller Zahlen</i> unterscheiden:</p> <table border="1" data-bbox="320 1648 906 1805"> <tbody> <tr> <td data-bbox="320 1648 563 1727">finite Zahlen</td> <td data-bbox="569 1648 906 1727">Betrag kleiner als eine natürliche Zahl</td> </tr> <tr> <td data-bbox="320 1727 563 1805">infinite Zahlen</td> <td data-bbox="569 1727 906 1805">Betrag größer als jede positive reelle Zahl.</td> </tr> </tbody> </table> <p>Zu den <i>finiten Zahlen</i> gehören</p>	finite Zahlen	Betrag kleiner als eine natürliche Zahl	infinite Zahlen	Betrag größer als jede positive reelle Zahl.	<p>Übung?</p> <p><i>Diskussion!</i></p> <p>Beweis als Übung.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 4</i></p> <p>s. Aussage u. Hinweis in Unterrichtsabschnitt 3. Übung.</p>
finite Zahlen	Betrag kleiner als eine natürliche Zahl				
infinite Zahlen	Betrag größer als jede positive reelle Zahl.				

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>		<i>Kommentar</i>																																																		
reelle Zahlen $r$	Von den reellen Zahlen gehen wir aus.																																																			
infinitesimale Zahlen $\alpha$	Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl.																																																			
hyperreelle, nicht reelle Zahlen	unendlich nah zu einer reellen Zahl																																																			
<p>Das Rechnen mit <i>positiven</i> hyperreellen Zahlen wollen wir nach Typen ordnen. Prüfe die Felder! (Rechne linke Zahl verknüpft mit oberer Zahl!)</p> <table border="1"> <tr> <td>+</td> <td>infinites.</td> <td>finit</td> <td>reell</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>infinites.</td> <td>infinites.</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>reell</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>reell</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>infin</td> <td>infin</td> <td>infin</td> <td>infin</td> <td>infin</td> </tr> </table> <table border="1"> <tr> <td>-</td> <td>infinites.</td> <td>finit</td> <td>reell</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>infinites.</td> <td>infinites.</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>reell</td> <td>finit</td> <td>finit</td> <td>reell</td> <td>infin</td> </tr> <tr> <td>infin</td> <td>infin</td> <td>infin</td> <td>infin</td> <td></td> </tr> </table> <p><i>Frage:</i> Warum ist das Feld „<i>infin</i> – <i>infin</i>“ leer?  <i>Begründe!</i></p> <p><i>Hinweis:</i>            Sei <math>\Lambda</math> <i>infin</i>, <math>r</math> reell. Dann gibt es zwei Fälle:            a) <math>2 \cdot \Lambda - \Lambda = \Lambda</math> ist <i>infin</i>,            b) <math>(\Lambda + r)</math> ist <i>infin</i> und <math>(\Lambda + r) - \Lambda = r</math> ist reell.</p> <p>Suche weitere Fälle!</p>		+	infinites.	finit	reell	infin	infinites.	infinites.	finit	finit	infin	finit	finit	finit	finit	infin	reell	finit	finit	reell	infin	infin	infin	infin	infin	infin	-	infinites.	finit	reell	infin	infinites.	infinites.	finit	finit	infin	finit	finit	finit	finit	infin	reell	finit	finit	reell	infin	infin	infin	infin	infin		<p><i>Besser</i> als die Prüfung der Felder ist die Herstellung der Tafeln als <i>Hausaufgabe</i>, in Einzel- oder Gruppenarbeit.</p> <p>Spalte „<i>finit</i>“ ohne reelle und infinitesimale Zahlen</p> <p>Hausaufgabe, Übung?</p> <p>Hausaufgabe, Übung.</p>
+	infinites.	finit	reell	infin																																																
infinites.	infinites.	finit	finit	infin																																																
finit	finit	finit	finit	infin																																																
reell	finit	finit	reell	infin																																																
infin	infin	infin	infin	infin																																																
-	infinites.	finit	reell	infin																																																
infinites.	infinites.	finit	finit	infin																																																
finit	finit	finit	finit	infin																																																
reell	finit	finit	reell	infin																																																
infin	infin	infin	infin																																																	

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>					<i>Kommentar</i>
·	infinites.	finit	reell	infin	
infinites.	infinites.	infinites.	infinites.		
finit	infinites.	finit	finit	infin	
reell	infinites.	finit	reell	infin	
infin		infin	infin	infin	
<p>Frage: Warum ist z.B. das Feld „<i>infinitesimal · infinit</i>“ leer? Begründe!</p> <p>Hinweis:  <math>dx</math> und <math>dx \cdot dx</math> sind infinitesimal, also <math>\frac{1}{dx}</math> und <math>\frac{1}{dx \cdot dx}</math> infinit. Dann ist einerseits            a) <math>dx \cdot \frac{1}{dx} = 1</math>, also reell, andererseits            b) <math>dx \cdot \frac{1}{dx \cdot dx} = \frac{1}{dx}</math> infinit.</p> <p>Suche weitere Fälle!</p>					
:	infinites.	finit	reell	infin	
infinites.		inf. tes.	inf. tes.	inf. tes.	
finit	infin	finit	finit	inf. tes.	
reell	infin	finit	reell	inf. tes.	
infin	infin	infin	infin		
<p>Hier sehen wir wieder leere Felder. Warum ist das Feld <i>infinitesimal : infinitesimal</i> leer.</p> <p>Hinweis:  <math>dx</math> und <math>dx \cdot dx</math> sind infinitesimal. Dann ist einerseits            a) <math>dx : dx = 1</math>, also reell, andererseits            b) <math>dx : (dx \cdot dy) = \frac{1}{dy}</math> infinit.</p> <p>Wir können grob, aber zutreffend, sagen, <math>dx \cdot dy</math> ist „infinitesimaler“ als <math>dx</math>. Auf solche Verhältnisse muss man beim Dividieren streng achten (vgl. Hauptsatz in 2.2, s. 6.2).</p>					<p>Hausaufgabe, Übung.</p> <p>Aus Platzgründen kürzen wir hier innerhalb der Tabelle „infinitesimal“ mit „inf. tes.“ ab.</p>

<i>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</i>	<i>Kommentar</i>
Begründe, warum andere Felder leer sind!	Hausaufgabe. Hier tritt der Fall „infiniterer“ Zahlen auf.
<i>Rückblick und Ausblick</i>	<i>Unterrichtsabschnitt 5</i>
Wir haben eine <i>arithmetische Theorie</i> aufgebaut.	Formulierung einer <i>Axiomatik</i> .
Wie sind wir vorgegangen? Was waren unsere <i>Grundsätze</i> ?	
1. Wir gingen aus von der <i>Theorie der reellen Zahlen</i> $\mathbb{R}$ .	
2. Wir erfanden <i>infinitesimale Zahlen</i> $\alpha, \beta, dx$ usw.	
3. Die entstehenden arithmetischen Terme sind <i>hyperreelle Zahlen</i> in ${}^*\mathbb{R}$ .	
4. Die alten arithmetischen Aussagen und Regeln gelten in ${}^*\mathbb{R}$ weiter.	
Für die <i>Anwendung in der Analysis</i> sind wichtig:	s. 2.1 und 2.2 und Kapitel 3.
5. Jede finite hyperreelle Zahl $q$ besitzt einen reellen Anteil ( <i>Standardteil</i> ) $r$ mit $q \simeq r$ .	
6. Wir denken uns die reellen Relationen und Funktionen auf ${}^*\mathbb{R}$ <i>fortgesetzt</i> .	<i>Transferprinzip</i>

### *Liste der Zahlbezeichnungen,*

die wir hier und in den anderen Unterrichtsskizzen sukzessive vorgeschlagen haben.

Die Bezeichnungen der natürlichen Zahlen und reellen Zahlen bleiben unangetastet. Rationale Zahlen werden in der Regel wie reelle Zahlen behandelt und bezeichnet. Für die neuen hyperreellen Zahlen schlagen wir vor, nach folgenden Regeln vorzugehen. Wir bezeichnen

- infinitesimale Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus dem Anfang des Alphabets, Ausnahme  $\omega$ ,
- finite hyperreelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus der zweiten Hälfte des Alphabets, Ausnahmen  $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$ ,
- infinite hyperreelle Zahlen mit großen griechischen Buchstaben, die sich von den lateinischen Großbuchstaben unterscheiden. Zusätzlich  $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$ , z.B. als infinite Indizes in der Verbindung mit natürlichen Laufindizes  $i, m, n, k, l$ .

Liste:

infinitesimale Zahlen	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, dx, dy, ds, dt$
finite hyperreelle Zahlen für Variable	$\vartheta, \rho, \sigma, \tau,$ $\eta, \xi, \zeta$
infinite hyperreelle Zahlen aber auch	$\Gamma, \Lambda, \Pi, \Phi, \Omega$ $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$

### 2.3.1 Ein Beweis im Unterrichtsgespräch [F]

so, wie es sich zwischen Lehrerin/Lehrer (L) und Schülerinnen/Schülern (S) zutragen könnte – vielleicht etwas idealisiert?

*Beweis* der Aussage:  $\alpha + \alpha = 2\alpha$  ist infinitesimal, wenn  $\alpha$  infinitesimal ist.

L. (blickt auf Ausschnitt der Zahlengerade – vgl. 2.1): „Wir sehen auf dem Ausschnitt der Zahlengerade, wie die Infinitesimalien um die 0 herum liegen – und nirgendwo ist eine weitere reelle Zahl außer 0 zu sehen. Wo liegt denn eigentlich  $\alpha + \alpha = 2\alpha$  oder  $\alpha + \beta$ ?“

S: „Ist doch klar: auch in diesem Ausschnitt, nur weiter rechts von  $\alpha$  bzw.  $\beta$ !“

L: „Anschaulich ist das klar – aber können wir das auch mathematisch beweisen? Können wir nur mit den bekannten Eigenschaften von Infinitesimalien nachweisen, dass auch  $2\alpha$  und  $\alpha + \beta$  in dem Ausschnitt liegen?“

S: „Wozu das denn? Ist doch klar! Sieht doch jeder!“

L: „Manchmal trügt aber auch der Schein und man lässt sich dadurch leicht verleiten, etwas für richtig zu halten, was aber in Wahrheit gar nicht richtig ist. Deshalb muss in Mathe eine Aussage bewiesen werden.“

S: „Also gut! Aber wie soll das denn gehen? Was müssen wir denn tun?“

L: „Naja, nehmen wir die erste Aussage:  $2\alpha$  soll auch in dem Ausschnitt der Zahlengerade um die 0 herum liegen, also  $2\alpha$  soll auch infinitesimal sein, wenn  $\alpha$  infinitesimal ist. – Was heißt das?“

S: „Doch wohl, dass  $2\alpha$  kleiner ist als jede positive Zahl  $r$ .“

L: „Genau! Das müssen wir zeigen!“

S: „Aber das geht doch gar nicht:  $\alpha$  ist doch schon kleiner als  $r$ , dann ist  $2\alpha$  doch nur kleiner als  $2r$  und nicht kleiner als  $r$ ! Also stimmt das gar nicht, was wir beweisen wollen!“

L: „Moment! Nicht so schnell! –  $2\alpha$  soll kleiner als  $r$  werden. Dabei ist  $r$  eine beliebig kleine positive reelle Zahl, die wir uns jetzt mal fest vorgeben;  $r$  ist also beliebig, aber fest – so sagt man!“

S: „Ja, aber dann ist  $2\alpha$  trotzdem nicht kleiner als  $r$ , sondern nur kleiner als  $2r$ , wenn  $\alpha$  kleiner ist als  $r$ .“

L: „Da hast du Recht! Aber muss denn  $\alpha$  kleiner als  $r$  sein?“

S: „Steht doch da (liest vor): ‚Eine infinitesimale Zahl  $\alpha$  ist kleiner als jede positive reelle Zahl  $r$ .‘ – und nur das sollen wir doch bei dem Beweis verwenden.“

L: „Genau!  $\alpha$  ist kleiner als jede positive reelle Zahl – das ist die wichtige Aussage. Aber muss diese Zahl denn unbedingt  $r$  sein? Doch wohl nicht. Es muss nicht die Zahl  $r$  sein, die wir oben beliebig, aber fest vorgegeben haben. Es kann auch irgendeine andere reelle positive Zahl, z.B.  $s$ , sein.“

S: „Also kann ich dieses  $s$  ja auch kleiner oder größer als das feste  $r$  wählen.“

L: „Du hast es erfasst! Welcher Wert für  $s$  würde uns denn gut im Beweis passen?“

S: „ $\frac{r}{2}$  oder noch kleiner.  $\frac{r}{2}$  würde reichen: diese Zahl ist auf jeden Fall auch reell und positiv, und wenn wir  $\alpha < \frac{r}{2}$  wählen – das dürfen wir ja, wie wir oben gehört haben –, dann ist  $2\alpha < 2 \cdot \frac{r}{2} = r$ .“

L: „Super! Jetzt sind wir fertig und die obige Aussage ist nicht nur anschaulich klar, sondern auch mathematisch bewiesen.“

S: „Keiner kann uns mehr was!“



# Kapitel 3

## Ergänzungen und Erweiterungen

### 3.1 Von der 0,999...-Frage zur Ableitung [F/H]

Die folgende Unterrichtsreihe stellt einen alternativen Zugang zur herkömmlichen Vorgehensweise bei der Einführung in die Differentialrechnung dar. Ausgangspunkt hierbei ist die 0,999...-Problematik, die die Schülerinnen und Schüler motiviert und auf natürlichem Weg zu den infinitesimalen Zahlen führt.

Diese Infinitesimalien dienen jedoch nicht nur als rechnerisches Kalkül, sondern auch als Beispiel für unterschiedliche mathematische Theorien, die zu unterschiedlichen Folgerungen führen.

Nimmt man die berechtigte Kritik an der „Grenzwert-Analyse“ ernst, dass sie oft ohne ihre eigentliche Grundlage – nämlich die Grenzwerte – unterrichtet wird, so sollte man auch die „Infinitesimal-Analyse“ nicht ohne ihre eigentliche Grundlage – die Infinitesimalien – unterrichten. Deshalb wird deren Behandlung in diesem Unterrichtsgang ein angemessener Raum zur Verfügung gestellt.

Erwähnt werden muss noch, dass die Unterrichtsreihe in einem Grundkurs 11 im Schuljahr 2018/19 mit Erfolg unterrichtet wurde und dass deshalb in der „Kommentar“-Spalte auch markante Schüleräußerungen erwähnt werden (kursiv, gekennzeichnet mit „S“).

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über den Verlauf der Unterrichtsreihe. *Nur die kursiv gesetzten Unterrichtsinhalte* behandeln Infinitesimalien. Von diesen wiederum betreffen nur die ersten beiden die in diesem Abschnitt behandelte Thematik.

<i>Unterrichtsinhalte</i>	<i>Infinitesimalien</i>
<i>0,999... - Frage</i>	<i>im Anmarsch... (4h)</i>
<i>Hyperreelle Zahlen: Einführung – Verständnisfragen – Übungen</i>	<i>zentral (7h)</i>
<i>Lineare Funktionen: Differenzenquotient, Steigung</i>	—
<i>Einführung des Ableitungsbegriffs: mittlere Steigung einer Funktion, lokale Steigung einer Funktion</i>	<i>als Kalkül (8h)</i>
<i>Ableitungsfunktion</i>	—
<i>Graphisches Ableiten</i>	—
<i>Elementare Ableitungsregeln erarbeiten</i>	<i>als Kalkül (4h)</i>
<i>Ableitungsregeln anwenden</i>	—
<i>Eigenschaften von Funktionen/ Funktionsuntersuchungen</i>	—
<i>Anwendungen der Differentialrechnung</i>	—

## Unterrichtsgang

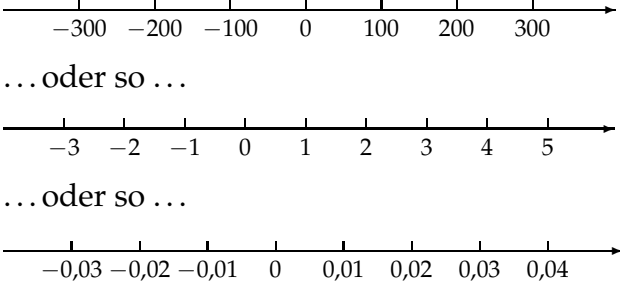
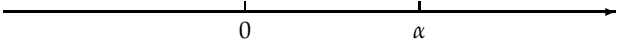
<i>Von der 0,999...-Frage zur Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p><i>0,999... - Frage</i></p> <p><u>Arbeitsblatt oder einfache Abfrage:</u> Ist 0,999... kleiner oder gleich 1?</p> <p><input type="radio"/> 0,999... = 1    <input type="radio"/> 0,999... &lt; 1</p> <p>Begründungen:</p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 1</i></p> <p>Im Rahmen einer Wiederholung des Unter- und Mittelstufenstoffes kann die Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche zur Sprache kommen, was zu durchaus produktiven Streitgesprächen führen kann.</p> <p>S. (pro =): „Der Unterschied ist so gering, dass es keinen Unterschied gibt.“</p>

Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p>Beweise von <math>0,999\dots = 1</math>:</p> <p>a)</p> $0,111\dots = \frac{1}{9}$ $9 \cdot 0,111\dots = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ $0,999\dots = 1 \quad \square$	<p>S. (pro =): „Man müsste <math>0,\overline{0}1</math> zu <math>0,\overline{9}</math> dazurechnen, aber diese Zahl existiert nicht.“</p> <p>S. (pro &lt;): „Auch wenn die Nachkommastellen unendlich lang sind, bleibt ein kleiner Unterschied. <math>0,999\dots</math> ist kleiner als 1, weil die Zahl immer näher an die 1 geht, aber nie ankommt.“</p> <p>Im Unterrichtsgespräch zeigt sich häufig, dass die Schülerinnen und Schüler selbst bei einer Entscheidung für <math>0,999\dots = 1</math> eigentlich im Sinne von „&lt;“ argumentieren.</p> <p>Für die Gegenüberstellung der Begründungen beider Thesen sowie der jeweils zugehörigen Beweise bietet es sich an, die gesamte Tafel zu nutzen und die beiden Positionen jeweils konsequent am linken (<math>0,999\dots = 1</math>) bzw. rechten (<math>0,999\dots &lt; 1</math>) Flügel der Tafel darzustellen, um den Schülerinnen und Schülern die „Gleichwertigkeit“ der beiden Ansätze zu verdeutlichen.</p> <p>Die folgenden drei Beweise für <math>0,999\dots = 1</math> sind Standard.</p>

Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p>b)</p> $\begin{array}{r} 10 \cdot 0,999 \dots = 9,999 \dots \\ - 1 \cdot 0,999 \dots = 0,999 \dots \\ \hline 9 \cdot 0,999 \dots = 9 \\ 0,999 \dots = 1 \quad \square \end{array}$ <p>c) Arithmetisches Mittel</p> $\frac{1+0,999\dots}{2} = \frac{1,999\dots}{2} = 0,999\dots$ <p>Wenn das arithmetische Mittel zweier Zahlen gleich einer der beiden Zahlen ist, dann müssen beide Zahlen gleich sein:</p> $0,999\dots = 1 \quad \square$ <p>Das klingt überzeugend!</p> <p><u>Aber vielleicht ist doch <math>0,999\dots &lt; 1</math>:</u></p> <p>Zu a): -&gt; später ... (vgl. S. 50)</p> <p>Zu b): Oben wurde gerechnet:</p> $\begin{aligned} & 9,999\dots && - 0,999\dots \\ = & (9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots) - (0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots) \\ = & 9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots - 0,9 - 0,09 - 0,009 - \dots \\ = & 9 + (0,9 - 0,9) + (0,09 - 0,09) + (0,009 - 0,009) + \dots \\ = & \begin{array}{ccccccc} 9 & + & 0 & + & 0 & + & \\ & & 0 & + & \dots & & \end{array} \\ \equiv & \underline{9} \end{aligned}$ <p>Aber es geht auch so:</p>	<p>Die folgenden <i>Nichtstandard</i>-Argumentationen bringen die drei bekannten Beweise ins Wanken bzw. widerlegen diese und bestätigen die Position <math>0,999\dots &lt; 1</math>.</p> <p>Hier wird ein <u>zentrales Problem</u> deutlich: Darf man mit unendlichen Summen rechnen wie mit endlichen? Man denke etwa an:</p> $\begin{aligned} & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots \\ & = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ & = 0 \end{aligned}$ <p>Aber andererseits ist:</p>

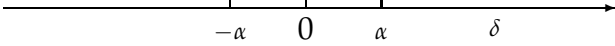
Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
$  \begin{aligned}  & 9.999\dots - 0,999\dots \\  &= (9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots) - (0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots) \\  &= 9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots - 0,9 - 0,09 - 0,009 - \dots \\  &= (9 - 0,9) + (0,9 - 0,09) + (0,09 - 0,009) + (0,009 - 0,0009) + \dots \\  &= 8,1 + 0,81 + 0,081 + 0,0081 + \dots \\  &= 8,91 + 0,081 + 0,0081 + \dots \\  &= 8,991 + 0,0081 + \dots \\  &= 8,9991 + \dots \\  &= \underline{8,999\dots 1}  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots \\  &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \\  &= 1 \\  &\implies \underline{0 = 1?}  \end{aligned}  $
<p>Und dann lautet b) weiter:</p> $  \begin{aligned}  9 \cdot 0,999\dots &= 8,999\dots 1 \\  0,999\dots &= 0,999\dots \quad !?  \end{aligned}  $ <p>Dies ist eine allgemeingültige Aussage, die bei keinem Beweis weiterhilft!</p>	<p>Den Schülerinnen und Schülern sollte an dieser Stelle klar werden, dass damit zwar die Argumentation für <math>0,999\dots = 1</math> ausgehebelt wird, aber nicht <math>0,999\dots &lt; 1</math> bewiesen ist.</p>
<p>Zu c): Möglich wäre auch</p> $  \begin{aligned}  \frac{1+0,999\dots}{2} &= \frac{(1+0,9+0,09+\dots)}{2} \\  &= 0,5 + 0,45 + 0,045 + 0,0045 + \dots \\  &= 0,95 + 0,045 + 0,0045 + \dots \\  &= 0,995 + 0,0045 + \dots \\  &= 0,999\dots 5  \end{aligned}  $	<p>S: „0,999...5 – das Ende der Unendlichkeit kommt nie; also kommt auch die 5 nie; diese Zahl gibt es nicht!“ S: „Wenn ich nur natürliche Zahlen kenne, gibt es zwischen 9 und 10 auch keine Zahl mehr – vielleicht brauchen wir neue Zahlen?“</p>
<p>Und dieses arithmetische Mittel ist <u>nicht</u> gleich einem der beiden Summanden! Also muss es zwischen 0,999... und 1 doch noch (mindestens) eine Zahl geben! <math>\implies 0,999\dots &lt; 1 \quad \square</math></p> <p>Also drängt sich die wichtige Frage auf: <u>Was ist denn nun richtig:</u></p>	

<i>Von der 0,999...-Frage zur Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p style="text-align: center;"><u><math>0,999\dots = 1</math> oder <math>0,999\dots &lt; 1</math>?</u></p> <p>Die Antwort kann nur lauten:</p> <p style="text-align: center;"><u>Beides – je nach Theorie!!</u></p> <p>In der <u>Grenzwert-Mathematik</u> ist <u><math>0,999\dots = 1</math></u>; wir bewegen uns im Bereich der reellen Zahlen <math>\mathbb{R}</math>, wir verwenden Grenzwerte, es gelten die bekannten Rechengesetze, der Vorteil: Standard seit 150 Jahren!</p> <p>In der <u>Infinitesimal-Mathematik</u> ist <u><math>0,999\dots &lt; 1</math></u>; wir bewegen uns im Bereich der hyperreellen Zahlen <math>{}^*\mathbb{R}</math> (einer Erweiterung der reellen Zahlen), es gelten die bekannten Rechengesetze, es ist zwar nicht Standard, dafür aber der Vorteil: Erfasst die Intuition!</p> <p><u>Wir entscheiden uns beim weiteren Vorgehen für die Intuition</u>, also für die hyperreellen Zahlen. Diese wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.</p> <p><i>Hyperreelle Zahlen</i></p> <p><i>Einführung – Verständnisfragen – Übungen</i></p> <p><b>Die infinitesimale Zahl <math>\alpha</math></b></p> <p>Wir gehen also aus von <math>0,999\dots &lt; 1</math> Die Differenz von 1 und <math>0,999\dots</math> beträgt ein</p>	<p>S: „Dieselbe Aufgabe hat 2 unterschiedliche Lösungen – das kann ja nicht sein; Mathe ist doch eindeutig!“</p> <p>Es ist in der Mathematik nicht immer alles „klar“ bzw. „eindeutig“ – allerdings muss an dieser Stelle ausdrücklich dem Eindruck entgegenwirken werden, Mathematik sei in irgendeiner Weise „beliebig“.</p> <p>Am Beispiel der Infinitesimalien sollen die Schülerinnen und Schüler vielmehr erkennen, dass unterschiedliche mathematische Theorien zu unterschiedlichen Folgerungen führen können, die innerhalb der jeweiligen Theorien gültig sind.</p> <p><i>Unterrichtsabschnitt 2</i></p> <p><i>Rechnerische und geometrische Darstellung</i></p>

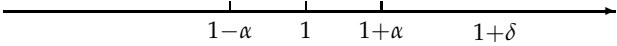
Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p>„Unendlichstel“, wir nennen es <math>\alpha</math>.</p> <p><u>Wie groß ist <math>\alpha</math>?</u>  <math>\alpha</math> ist nicht 0 und unendlich klein oder <u>infinitesimal</u>, d.h. kleiner als jede positive reelle Zahl! Wir schreiben dafür <math>\alpha \simeq 0</math>.</p> <p><math>\alpha</math> stellt eine neuartige Zahl dar, die nicht reell ist. Folglich lässt sie sich auch nicht als Dezimalbruch darstellen. Stattdessen schreiben wir:</p> $\alpha = 1 - 0,999\dots$ $= (1; 1; 1; \dots) - (0,9; 0,99; 0,999; \dots)$ $= (1 - 0,9; 1 - 0,99; 1 - 0,999; \dots)$ $\alpha = (0,1; 0,01; 0,001; \dots)$ <p><u>Veranschaulichung von <math>\alpha</math>:</u>            So kennst du die Zahlengerade ...</p>  <p>...oder so ...</p> <p>...oder so ...</p> <p>Aber jetzt?</p>  <p>a) Wo liegt hier 1 oder 0,1?</p> <p>b) Kannst du <math>\frac{1}{2}\alpha</math> eintragen?</p>	<p>Jede reelle Zahl <math>r</math> wird als Folge mit konstanten Gliedern notiert:  <math>r = (r; r; r; \dots)</math>;            nicht-reelle Zahlen haben demgegenüber veränderliche Glieder.            Die Summen- und Differenzbildung erfolgt gliedweise, ebenso die Multiplikation und Division.</p> <p>S: „Man müsste <math>\alpha</math> mit unendlich multiplizieren; deshalb kann (außer der Null) keine reelle Zahl auf dieser Zahlengeraden liegen.“            Mit 0 und <math>\alpha</math> ist tatsächlich keine (weitere) reelle Zahl mehr auf der Zahlengeraden sichtbar, <math>\frac{1}{2}\alpha</math> sehr wohl!</p>

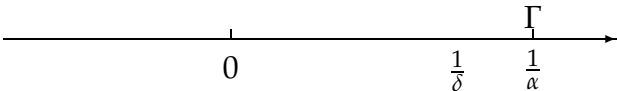
Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p><b>Weitere infinitesimale Zahlen</b></p> <p><u>Gibt es außer <math>\alpha</math> weitere Infinitesimalien?</u></p> <p>Es gibt unendliche viele infinitesimale Zahlen, z.B.</p> $\frac{1}{2}\alpha = (0,05; 0,005; 0,0005; \dots)$ $\beta = (\frac{1}{11}; \frac{1}{111}; \frac{1}{1111}; \dots)$ $\gamma = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots)$ $\delta = (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \dots)$ <p>Diese liegen alle in infinitesimaler Nähe zu 0.</p> <p><u>Übungen/ weiterführende Fragestellungen:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Berechne mit den obigen Zahlen <math>2 \cdot \gamma</math>, <math>\gamma + \delta</math>, <math>\gamma \cdot \delta</math>!</li> <li>• Gibt es eine kleinste infinitesimale Zahl?</li> </ul> <p><u>Anordnung:</u></p> <p><u>Def.:</u> Die infinitesimale Zahl <math>\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots)</math> ist größer als die infinitesimale Zahl <math>\beta = (\beta_1; \beta_2; \beta_3; \dots)</math>, wenn bis auf endlich viele <math>\alpha_i</math> und <math>\beta_i</math> gilt:</p> $\alpha_i > \beta_i.$ <p>In Zeichen:</p> $\alpha > \beta.$ <p>Entsprechend wird die „&lt;“-Relation definiert.</p> <p>So gilt etwa in unserem Bsp.: <math>\alpha &lt; \delta</math>.</p>	<p>S: „Ein Unendlichstel nochmal zu halbieren, ist komisch! Man müsste <math>\frac{1}{2}\alpha</math> mal rechnerisch ausprobieren!“</p> <p>Übungen wie diese ermöglichen den Schülerinnen und Schülern ein unkompliziertes Annähern an die „neuen“ Zahlen.</p> <p>Für ein tieferes Verständnis ist die Diskussion dieser weiterführenden Frage sinnvoll und gewinnbringend.</p> <p>Mit dieser (für die Praxis ausreichenden) Definition lässt sich nun auch Beweis a) zur Gültigkeit von <math>0,999\dots = 1</math> (vgl. S. 46) in Frage stellen, der auf der <i>Standard-Annahme</i> <math>0,111\dots = \frac{1}{9}</math> gründet.</p> <p>Mit dieser Definition folgt</p>



Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p><u>Darstellung an der Zahlengerade:</u></p> <p>Wir richten quasi eine „Unendlichkeitslupe“ auf die 0. Außer 0 liegt keine weitere reelle Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!</p>  <p><b>Rechnen mit infinitesimalen Zahlen</b></p> <p>Das Rechnen mit den infinitesimalen Zahlen folgt innerhalb der Folgenglieder denselben Regeln wie das Rechnen mit reellen Zahlen.</p> <p><u>Satz 1</u> (Addition, Subtraktion, Multiplikation): Für alle infinitesimalen Zahlen <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> und jede reelle Zahl <math>r</math> gilt: <math>\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, r \cdot \alpha</math> sind ebenfalls infinitesimal.</p>	<p>in der <i>Nichtstandard-Analysis</i> aus  <math>0,1 &lt; \frac{1}{9}; 0,11 &lt; \frac{1}{9}; \dots</math>  gerade  <math>0,111\dots &lt; \frac{1}{9}</math>.</p> <p>Und daraus lässt sich folgern:  <math>9 \cdot 0,111\dots &lt; 9 \cdot \frac{1}{9}</math>  <math>0,999\dots &lt; 1 \quad \square</math></p> <p>Vgl. Abschnitte 6.2 und 3.2  Mit der Vorgabe von 0 und <math>\alpha</math> können wir auch reelle Vielfache von <math>\alpha</math> genau an der Zahlengeraden verorten.</p> <p>Dies gilt nicht für <math>\delta</math>. Von dieser Zahl wissen wir nur, dass sie größer als <math>\alpha</math> ist und dementsprechend rechts von <math>\alpha</math> liegen muss. <math>\delta</math> ist jedoch kein reelles Vielfaches von <math>\alpha</math> und daher nicht maßstäblich einzuzeichnen.</p> <p>Vgl. Abschnitt 2.3, S. 33</p>

<i>Von der 0,999...-Frage zur Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Komplizierter ist die <i>Division</i>:</p> <p><u>Satz 2 (Division)</u>: Für alle infinitesimalen Zahlen <math>\alpha</math> und <math>\beta</math> und jede reelle Zahl <math>r \neq 0</math> gilt:</p> <p>a) <math>\frac{\alpha}{\alpha} = 1</math>,</p> <p>b) <math>\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} \cdot \alpha \simeq 0</math>, d.h. ebenfalls infinitesimal,</p> <p>c) <math>\frac{r}{\alpha} = \Gamma</math> (eine unendlich große Zahl, größer als jede reelle Zahl!)</p> <p>d) <math>\frac{\alpha}{\beta}</math> kann nicht allgemein angegeben werden.</p> <p>Für d) sind vier Fälle möglich, die durch folgende Beispiele erklärt werden:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \Gamma</math>, d.h. unendlich groß,</li> <li>• <math>\frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}</math>, d.h. eine reelle Zahl,</li> <li>• <math>\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha</math>, d.h. infinitesimal,</li> <li>• <math>\frac{\beta + \alpha \cdot \beta}{\beta} = 1 + \alpha</math>, d.h. finit.</li> </ul> <p><b>Finite und infinite hyperreelle Zahlen</b></p> <p>Beim Rechnen mit infinitesimalen Zahlen stoßen wir auf weitere „neue“ Zahlen.</p> <p><u>Übung</u>:</p> <p>Berechne mit <math>\alpha = (0, 1; 0, 01; 0, 001; \dots)</math> und <math>\delta = (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \dots)</math></p> <p>a) <math>1 + \alpha</math>,      b) <math>\frac{1}{\alpha}</math>,      c) <math>\frac{1}{\delta}</math>.</p> <p>Zu a)  <math>1 + \alpha = (1; 1; 1; \dots) + (0, 1; 0, 01; 0, 001; \dots)</math>  <math>= (1, 1; 1, 01; 1, 001; \dots)</math></p> <p>Dies ist eine Zahl, die weder infinitesimal noch reell ist. Sie liegt offenbar <u>in infinitesi-</u></p>	<p>Solche Übungen zum Rechnen mit infinitesimalen Zahlen führen die Schülerinnen und Schüler gezielt zu weiteren „neuen“ Zahlen, den finiten und infiniten Zahlen.</p> <p>S: „Diese Zahl ist ja ganz, ganz dicht bei der 1. Nach der anderen Theorie wäre sie sogar 1.“</p>

Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar
<p><u>maler Nachbarschaft zur reellen Zahl 1.</u></p> <p><u>Def.:</u> Eine Zahl, die infinitesimal benachbart zu einer reellen Zahl liegt, heißt <u>finite Zahl</u>.</p> <p><u>Satz 3 (Zerlegbarkeit hyperreeller Zahlen):</u> Jede finite hyperreelle Zahl <math>h</math> lässt sich als Summe einer reellen Zahl <math>r</math> – ihrem reellen Teil – und einer infinitesimalen Zahl <math>\alpha</math> – ihrem infinitesimalen Teil – schreiben: <math>h = r + \alpha</math> Die Zahlen <math>r</math> und <math>\alpha</math> sind hierbei eindeutig bestimmt.</p> <p><u>Def.:</u> Der eindeutig bestimmte <u>reelle Teil</u> einer hyperreellen Zahl <math>h</math> soll abkürzend mit <math>rt(h) = rt(r + \alpha) = r</math> bezeichnet werden.</p> <p><u>Finite Zahlen auf der Zahlengeraden:</u></p> <p>Wir richten die „Unendlichkeitslupe“ jetzt auf die 1. Außer 1 liegt keine weitere reelle Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!</p>  <p><u>Beispiele infiniter Zahlen (Lösungen zu den Übungen b) und c), S. 52) :</u></p> $\frac{1}{\alpha} = (1, 1; 1; \dots) : (0, 1; 0, 01; 0, 001; \dots)$ $= (10; 100; 1000; \dots)$ $\frac{1}{\delta} = (1; 1; 1; \dots) : (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \dots) = (5; 6; 7; \dots)$ <p>Diese beiden Zahlen sind unendlich groß, d.h. größer als jede positive reelle Zahl.</p>	<p>Wir verwenden „rt“. In der Fachliteratur wird meist der Begriff „Standardteil (st)“ anstelle von „reeller Teil“ verwendet.</p> <p>S: „So wie wir das bei der Null gemacht haben, müssen wir jetzt die 1 ‚herzoomen‘.“</p> <p>S: „<math>\frac{1}{\alpha}</math> ist ja eine ganz, ganz große Zahl, jetzt wahrscheinlich größer als jede positive, reelle Zahl, und <math>\frac{1}{\delta}</math> ist auch ganz, ganz groß – also beides wächst über alles, was man sich vorstellen kann, hinaus.“</p>

<i>Von der 0, 999...-Frage zur Ableitung</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Denn wählt man bspw. in b) eine beliebige reelle Zahl <math>r = (r; r; r; \dots)</math> und vergleicht diese mit <math>\frac{1}{\alpha} = (10; 100; 1000; \dots)</math>, so gilt sicher ab einer gewissen natürlichen Zahl <math>n</math>: <math>10^n &gt; r</math>, d.h. unendlich viele Folgenglieder der Zahl <math>\frac{1}{\alpha} = \Gamma</math> sind größer als diejenigen von <math>r</math> und nur endlich viele kleiner.</p> <p>Deshalb ist <math>(10; 100; 1000; \dots) &gt; (r; r; r; \dots)</math>. Eine solche Zahl wie <math>\Gamma</math> nennt man <u>positiv infinit.</u> Schreibweise: <math>\Gamma \gg 1</math>.</p> <p><u>Infinite Zahlen auf der Zahlengeraden</u></p> <p>So wie wir bei der Darstellung der infinitesimalen Zahlen mit der „Unendlichkeitslupe“ unendlich vergrößert haben, müssen wir hier den Ausschnitt der Zahlengerade unendlich verkleinern.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p><u>Die hyperreellen Zahlen im Überblick</u></p> <p>Man kann die Menge der hyperreellen Zahlen <math>{}^*\mathbb{R}</math> in folgendem Mengenbild darstellen:</p>	<p>Die Definitionen der „&lt; - und &gt; -Relation“ für die infinitesimalen Zahlen (vgl. S. 50) lässt sich auf alle hyperreellen Zahlen übertragen.</p> <p>S: „<math>\frac{1}{\alpha}</math> wächst noch mehr als <math>\frac{1}{\delta}</math>! Jetzt müssen wir die Lupe ganz nach rechts halten!“</p> <p>Durch die unendliche Verkleinerung kann man sich alle finiten Zahlen in unmittelbarer Nachbarschaft der Null denken. In dieser Darstellung sind sie nicht mehr von Null unterscheidbar.</p> <p>Mit der Festlegung von 0 und <math>\Gamma = \frac{1}{\alpha}</math> können wir – analog zur Darstellung von infinitesimalen Zahlen – für <math>\frac{1}{\delta}</math> auch wieder nur schließen, dass diese Zahl kleiner als <math>\frac{1}{\alpha}</math> ist und sie dementsprechend links von <math>\frac{1}{\alpha}</math> liegen muss.</p>

Von der 0,999...-Frage zur Ableitung	Kommentar

Ein Vorschlag, wie man die Differentialrechnung – auch aufbauend auf dem hier dargestellten Einstieg – im Unterricht behandeln kann, wird in Abschnitt 2.1 vorgestellt.

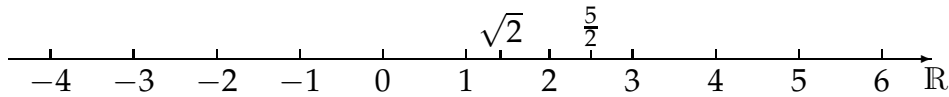
### 3.2 Veranschaulichung hyperreeller Zahlen [Ba]

In den Abschnitten 2.1 zur Ableitung und 2.2 zum Integral wurden Zahlen mit unendlich kleinem und unendlich großem Betrag verwendet, um bei Funktionsgraphen die Steigung oder den Flächeninhalt zwischen Graph und  $x$ -Achse zu berechnen. Diese Zahlen wurden dort bereits intuitiv auf einer Zahlengeraden dargestellt und diese Darstellung in 3.1 genauer diskutiert. In den Abschnitten 2.1 und 2.2 wurde erkennbar, wie man sich Funktionsgraphen vorstellen muss, wenn man sie an einem Punkt mit einem unendlichen Faktor vergrößert.

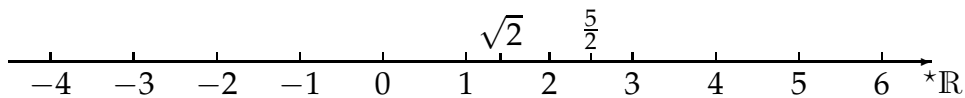
Auf den folgenden Seiten wird das Thema der Darstellung infinitesimaler und infiniter Zahlen auf einer Zahlengeraden zusammenhängend behandelt. Dabei handelt es sich nicht um eine Unterrichtsskizze, sondern um eine systematische Ideensammlung.

Veranschaulichung hyperreeller Zahlen	Kommentar
Eine Zahlengerade für ${}^*\mathbb{R}$ sieht zunächst genauso aus wie für reelle Zahlen. Sie ist eine durchgezogene Linie, weil zwischen zwei Zahlen immer unendlich viele weitere Zah-	

len liegen. Lediglich an der Bezeichnung ist zu erkennen, um welche Zahlenmenge es sich handelt, sei es nun  $\mathbb{R}$



oder die größere Zahlenmenge  ${}^*\mathbb{R}$ .



Eine hyperreelle Zahlengerade bietet aber neue, über die bisherigen hinausgehende, Möglichkeiten der Veranschaulichung.

Denn zu den reellen Zahlen sind Zahlen mit unendlich großem und unendlich kleinem Betrag hinzugekommen.

Diese infiniten bzw. infinitesimalen Zahlen sind (bis auf die Null) in dieser Darstellung der Menge  ${}^*\mathbb{R}$  aber nicht sichtbar.

In der Menge der hyperreellen Zahlen lassen sich verschiedene Zahltypen unterscheiden, für die man verschiedene Schreibweisen vereinbaren kann.

### Reelle Zahlen

wie üblich lateinische Kleinbuchstaben, also  $a, b, \dots, r, s, \dots; m, n$ , usw. für *natürliche Zahlen*.

**Infinite Zahlen** (Betrag größer als jede reelle Zahl)

griechische Großbuchstaben, also  $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Omega$ , aber auch  $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$ , z.B. als infinite Indizes.

**Infinitesimale Zahlen** (Betrag kleiner als jede positive reellen Zahl)

Zur Bezeichnung der verschiedenen hyperreellen Zahltypen siehe auch Abschnitt 2.3 ab Seite 31 über die hyperreelle Arithmetik.

Nicht zwingend, aber hilfreich kann es sein, für zueinander gehörende Kehrzahlen entsprechende Zeichen des griechischen Alphabets zu verwenden, also  $\Omega = \frac{1}{\omega}, \gamma = \frac{1}{\Gamma}$  usw.

griechische Kleinbuchstaben, also  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  usw., oder  $dx, dy, dt$  usw.

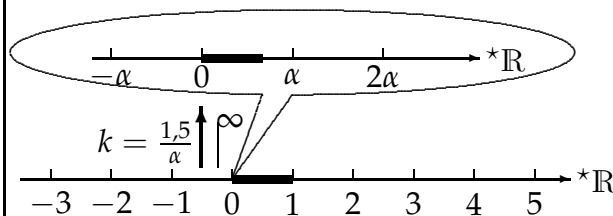
0 ist die einzige reelle Zahl, die auch infinitesimal ist.

**weitere finite, nicht reelle und nicht infinitesimale Zahlen** (Summe aus reellen und infinitesimalen Zahlen)

kleine griechischen Buchstaben aus der zweiten Hälfte des Alphabets, Ausnahmen  $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$ .

Um infinitesimale Zahlen darzustellen, ist eine Zahlengerade, wie sie bisher bekannt ist, bei der Null mit einem infiniten Faktor zu vergrößern.

Beispiel: Um die infinitesimale Zahl  $\alpha$  darzustellen, ist z.B. mit  $\frac{1,5}{\alpha}$  bei 0 zu vergrößern. Dann erscheint  $\alpha$  dort, wo vorher die 1,5 war.

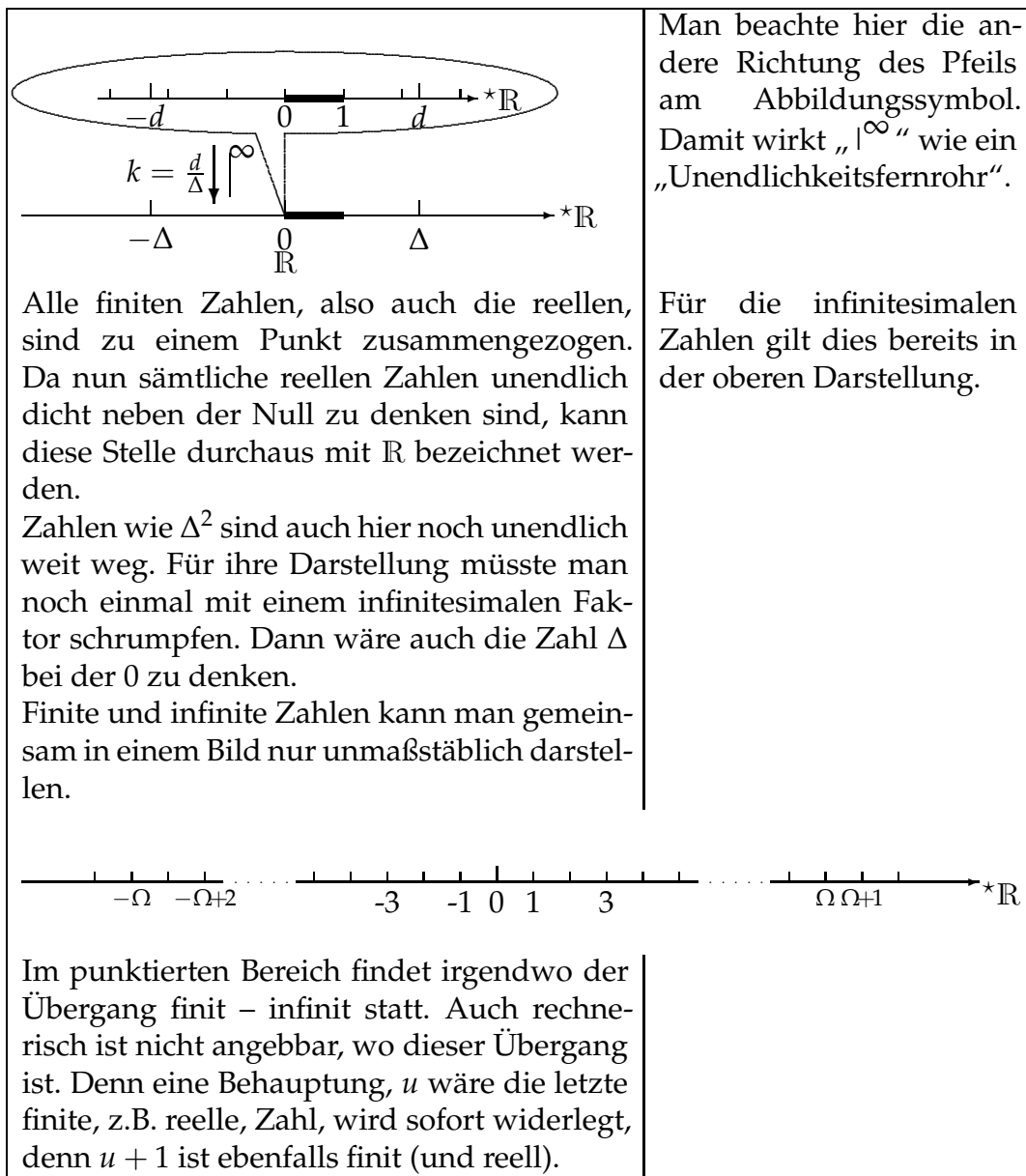


0 ist die einzige reelle Zahl, die in diesem Maßstab sichtbar ist, alle anderen reellen Zahlen sind wegen des unendlichen Vergrößerungsfaktors unendlich weit weggerückt. Zahlen wie  $\alpha^2$  sind hier nicht zu sehen; dazu wäre ein weiteres Mal mit infinitem Faktor zu vergrößern.

Um infinite Zahlen darzustellen, ist ein infinitesimaler Faktor anzuwenden.

Beispiel: Um die infinite Zahl  $\Delta$  darzustellen, ist mit  $\delta = \frac{d}{\Delta}$  zu verkleinern, damit  $\Delta$  dort erscheint, wo vorher die Zahl  $d$  war.

Der Pfeil neben dem Vergrößerungssymbol „ $\infty$ “ zeigt an, dass hier durch die „Unendlichkeitsbrille“ oder die „Unendlichkeitslupe“, wie wir sagen wollen, geschaut wird.



### 3.3 Substitution [Li]

Für die Berechnung von Integralen nach der Substitutionsregel hat sich bis in die Gegenwart auch in der Standardpraxis ein einfaches Kalkül erhalten, in dem man  $dx$ ,  $du$  usw. nicht wie sonst in der Standardanalysis nur als reine Symbole zur Angabe der Integrationsvariablen betrachtet, sondern damit wie mit Variablen rechnet. Auf Standardgrundlage taten dies manche nur mit schlechtem Gewissen — nicht ganz zu Unrecht, denn das Vorgehen findet erst im Nichtstandard-Zusammenhang, wo es sich bei  $dx$  usw.



tatsächlich um Variable handelt, seine Rechtfertigung.

Durch Substitution lassen sich Integrale der Form

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

berechnen. Ob der Integrand eine solche Form hat (oder sich in eine solche bringen lässt), ist nicht immer leicht zu erkennen, sodass man in der Praxis häufig mehrere Substitutionen  $u = g(x)$  durchprobieren wird. Im Nichtstandard-Kalkül lässt sich die eigentliche Substitution sehr einfach ausführen. Bis auf einen infinitesimalen Fehler kann man nämlich die Ableitung auch durch einen beliebigen Differentialquotienten ersetzen, und dieser darf insbesondere auch das im Integral schon vorhandene infinitesimale  $dx$  benutzen:

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ \frac{du}{dx} &\simeq g'(x) \\ du &\simeq g'(x) dx \end{aligned}$$

Mit den Entsprechungen  $g(x) = u$  und  $g'(x) dx \simeq du$  lässt sich die Variable  $x$  aus dem gegebenen Integral vollständig eliminieren. Da Integrale reellwertig sind, bei der Umformung also keine infinitesimalen Unterschiede zum Tragen kommen können, gilt statt  $\simeq$  sofort reine Gleichheit:<sup>1</sup>

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du .$$

Die Vorzüge des Verfahrens zeigen sich am deutlichsten an konkreten Beispielen.

### 1. a)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution:} \quad u &= x^2 \\ \frac{du}{dx} &\simeq 2x \\ du &\simeq 2x dx \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Wo der obige Kalkül auch im Standardzusammenhang benutzt wird, wird er natürlich selbst schon durchgehend mit Gleichheitszeichen geschrieben („ $\frac{du}{dx} = g'(x)$ “ usw.). Im Nichtstandard-Zusammenhang wäre das genauso wenig korrekt wie die z. B. auf Taschenrechnern benutzte Schreibweise „ $\frac{d}{dx}f$ “ für die Ableitung; vgl. Abschnitt 2.1.

Wenn man statt  $x$  im Integranden  $\frac{1}{2} \cdot 2x$  schreibt, lässt sich substituieren:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(u) du = 1$$

.....

**1. b)** Eine zweite Umformungsmöglichkeit für dasselbe Beispiel erfordert noch weniger Nachdenken, sieht aber vielleicht etwas irritierend aus, da in einem Zwischenschritt sowohl  $u$  als auch  $x$  im Integranden vorkommen:

$$\begin{aligned} \text{Subst.:} \quad u &= x^2 \\ \frac{du}{dx} &\simeq 2x \\ du &\simeq 2x dx \\ \frac{du}{2x} &\simeq dx \end{aligned}$$

Ohne dass man den Integranden erst umformen müsste, ergibt sich damit:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx = \int_0^{\pi} x \sin(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(u) du = 1$$

Hier gilt: Wenn man eine passende Substitution gefunden hat, fallen alle  $x$  beim Vereinfachen weg, oder umgekehrt: Wenn sich die  $x$  nicht vollständig aufheben, war die Substitutionsfunktion nicht geeignet.

**2.** Nicht selten probiert man verschiedene Substitutionen aus; mit dem Nicht-standard-Kalkül ist jeweils schnell zu erkennen, ob eine Substitution zum Erfolg führt.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx$$

Ein erster Versuch könnte sein:

$$\begin{aligned} \text{Subst.:} \quad u &= \tan x \\ \frac{du}{dx} &\simeq \frac{1}{\cos^2 x} \\ du &\simeq \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{aligned}$$

Aber weder dies noch  $\frac{du}{dx} \simeq \frac{1}{1+\tan^2 x}$  bringt einen irgendwohin, denn die Variable  $x$  würde nicht eliminiert: Man erhielte als Integranden  $\frac{1}{u} \cdot \cos^2 x du$  bzw.  $\frac{1}{u} \cdot (1 + \tan^2 x) du$ .

Erst wenn man sich an  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ , also  $\frac{1}{\tan} = \frac{\cos}{\sin}$ , erinnert und dann die Funktion im Nenner substituiert, geht die Rechnung glatt auf:

$$\begin{aligned} \text{Subst.:} \quad u &= \sin x \\ \frac{du}{dx} &\simeq \cos x \\ du &\simeq \cos x dx \end{aligned}$$

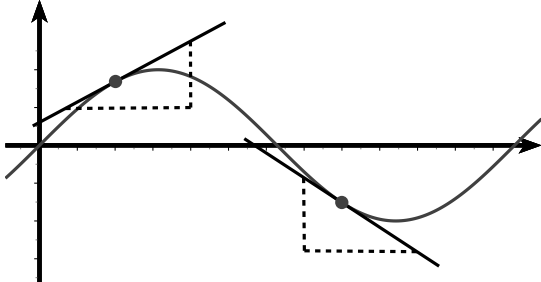
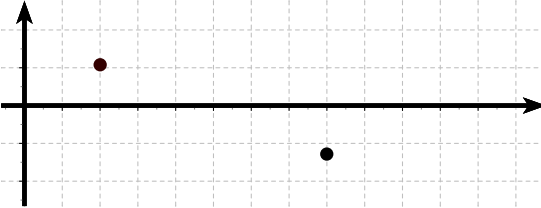
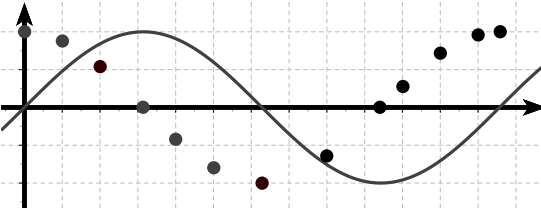
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{u} du = \left[ \ln |u| \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

### 3.4 Trigonometrische Funktionen [Ki]

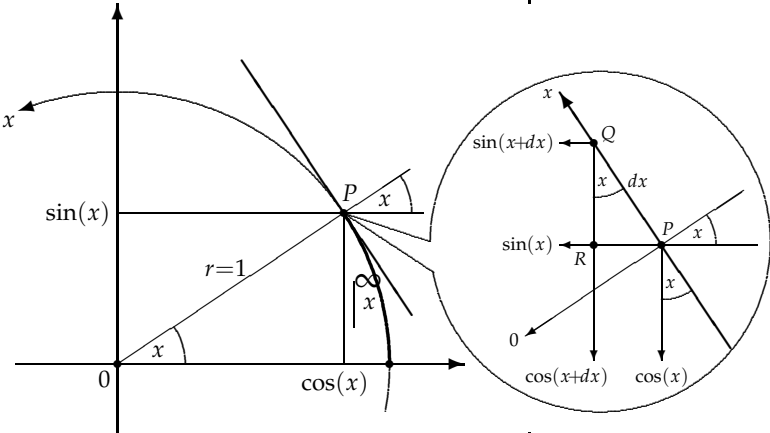
Wir wollen uns hier mit den trigonometrischen Funktionen, also  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\tan$ , mit den Mitteln der Differentialrechnung befassen. Diese stellen eine eigene Klasse von Funktionen mit speziellen Eigenschaften dar. Insbesondere sind sie periodisch, ihre Eigenschaften wiederholen sich also mit einer bestimmten Periode in gleicher Weise.

In diesem Unterrichtsgang werden wir auch das Bogenmaß eines Winkels kennenlernen. Erst damit wird es möglich, die trigonometrischen Funktionen als reelle Funktionen zu behandeln.

<i>Unterrichtsgang trigon. Fkt.</i>	<i>Kommentar</i>
<p><i>Grafische Ableitung der Sinusfunktion</i> Als Erstes wollen wir herausfinden, welche Ableitung die Sinusfunktion hat. Dabei können wir uns nicht auf bisher bekanntes stützen, da die trigonometrischen Funktionen eine eigene Klasse von Funktionen darstellen. Wir müssen unsere Betrachtungen daher ganz elementar beginnen.</p> <p>Um einen ersten Eindruck zu bekommen, können wir die Sinusfunktion zunächst grafisch ableiten. Dazu zeichnet man in verschiedenen Punkten ihres Graphen die Tangente ein und bestimmt deren Steigung.</p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 1</i> Hier gibt es eine schöne Möglichkeit, die Lernenden grafisch ableiten zu lassen und damit den Zusammenhang zwischen Graph, Tangentensteigung und Ableitung(-sfunktion) zu festigen.</p> <p>Die Lernenden können dazu <b>auf Papier</b> den Graphen der Sinusfunktion ausgehändigt bekommen</p>

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	Kommentar
<p data-bbox="244 383 882 640"><b>Aufgabe 1:</b> Leiten Sie die Sinusfunktion grafisch ab. Zeichnen Sie dazu in mindestens 10 verschiedenen Punkten über die erste Periode verteilt jeweils die Tangente ein, bestimmen Sie deren Steigung und tragen Sie deren Wert in das vorgegebene (oder ein eigenes) Diagramm ein (siehe Skizzen).</p>   <p data-bbox="244 1503 379 1536">Ergebnis:</p>  <p data-bbox="244 1850 882 1962">Das Ergebnis des grafischen Ableitens legt die <b>Vermutung</b> nahe: Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion.</p>	<p data-bbox="906 383 1287 1137">und müssen dann händisch die Tangenten einzeichnen und deren Steigungen mit Hilfe von geeigneten Steigungsdreiecken bestimmen. Das ist zwar relativ ungenau, führt aber dennoch zu der Vermutung, es könnte sich bei der Ableitung um die Kosinusfunktion handeln. Eleganter und genauer ist es, das grafische Ableiten <b>am Rechner</b> durchführen zu lassen (bei entsprechenden technischen Voraussetzungen). Dafür lässt sich sehr gut die Tangenten-Funktion von <b>GeoGebra</b> verwenden.</p>

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	Kommentar
<p data-bbox="320 376 932 414"><i>Rechnerische Ableit. der Sinusfunktion</i></p> <p data-bbox="320 454 959 607">Um unsere Vermutung zu bestätigen, müssen wir die Sinusfunktion rechnerisch ableiten. Dazu müssen wir auf die Definition von Sinus- und Kosinusfunktion zurückgreifen.</p> <p data-bbox="320 647 959 909">Sinus- und Kosinusfunktion sind mit Hilfe des <i>Einheitskreises</i> definiert: Man zeichnet einen Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung. Der erste Schenkel des betrachteten Winkels mit der Größe <math>x</math> liegt auf der <math>x</math>-Achse, der zweite Schenkel schneidet den Einheitskreis im Punkt <math>P</math>.</p> <p data-bbox="320 916 959 1025">Dann ist <math>\sin(x)</math> definiert als <math>y</math>-Koordinate von <math>P</math>, <math>\cos(x)</math> ist definiert als <math>x</math>-Koordinate von <math>P</math> (siehe Skizze).</p> <div data-bbox="427 1099 847 1451" style="text-align: center;"> </div> <p data-bbox="320 1541 959 1727">Eine Besonderheit des Einheitskreises ist es, dass die Maßzahl der Länge des Bogens, den der betrachtete Winkel aus dem Einheitskreis herauschneidet, gleich der Größe des Winkels (im Bogenmaß) ist.</p> <p data-bbox="320 1733 959 1883">Der auf der <math>x</math>-Achse beginnende Kreis kann daher in diesem Sinne als <math>x</math>-Achse betrachtet werden. Davon machen wir im folgenden Gebrauch.</p>	<p data-bbox="986 376 1342 414"><i>Unterrichtsabschnitt 2</i></p> <p data-bbox="986 421 1230 459"><b>Zum Bogenmaß:</b></p> <p data-bbox="986 465 1364 640">(1) Der Scheitelpunkt des Winkels wird als Mittelpunkt eines Kreises (mit beliebigem Radius) betrachtet.</p> <p data-bbox="986 647 1364 909">Die Größe <math>\alpha</math> des ebenen Winkels ist dann definiert als das Verhältnis der Länge <math>b</math> des Kreisbogens, den der Winkel aus dem Kreis herauschneidet, und dessen Radius <math>r</math>:</p> $\alpha := \frac{b}{r}$ <p data-bbox="986 1043 1364 1536">(2) Maßeinheit (Bogenmaß): Mit der Definition verwendet man sozusagen den Radius als Maßeinheit für die Bogenlänge; die Winkelgröße gibt in dieser Maßeinheit also an, wie oft der Radius in den Bogen passt. Daher der Name Bogenmaß. Die Maßeinheit der Winkelgröße ergibt sich aus ihrer Definition:</p> $[\alpha] = \frac{[b]}{[r]} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1 \text{ (rad)}$ <p data-bbox="986 1733 1364 1957">Um die Verwechslung mit einer reinen Zahlenangabe zu vermeiden, fügt man ggf. das Symbol „rad“ (für Radiant) an; es hat den Wert 1 und wird beim</p>

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	Kommentar
<p data-bbox="244 645 879 869">Wir betrachten den Punkt <math>P(\cos(x); \sin(x))</math> und stellen uns vor, dass die Figur von diesem Punkte aus mit einem infiniten Streckfaktor vergrößert wird. Der Kreis erscheint in dieser infiniten Vergrößerung als Gerade (siehe Abb.).</p>  <p data-bbox="244 1350 879 1574">Geht man von <math>P</math> aus um ein infinitesimales Stück <math>dx</math> in Richtung der „<math>x</math>-Achse“ (Kreisbogen), dann erreicht man den Punkt <math>Q(\cos(x + dx); \sin(x + dx))</math>. Aus dem (rechtwinkligen) Dreieck <math>PQR</math> lässt sich jetzt einfach ablesen:</p> $  \begin{aligned}  \frac{\sin(x + dx) - \sin(x)}{dx} &\approx \frac{ \overline{QR} }{ \overline{PQ} } \\  &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\  &= \cos(x)  \end{aligned}  $	<p data-bbox="906 383 1287 450">Rechnen einfach weglassen.</p> <p data-bbox="906 456 1287 645">Für den Einheitskreis (<math>r = 1</math>) ergibt sich aus (1) <math>a = b</math>. Die Bogenlänge dort ist also gleich der Winkelgröße (im Bogenmaß).</p> <p data-bbox="906 651 1287 801">Zur genauen Begründung für die Streckung des Kreises siehe nach diesem Unterrichtsgang auf S. 65</p>

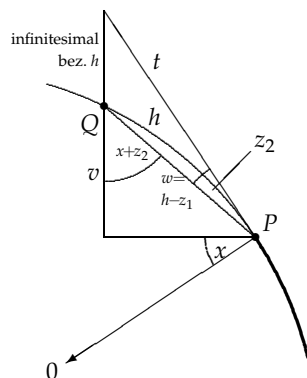
<i>Unterrichtsgang Trigon. Funktionen</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Es gilt also <math>\sin'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx} = \cos(x)</math>, unsere Vermutung ist damit bestätigt:</p> <p><i>Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion.</i></p> <p><i>Ableit. Kosinus- und Tangensfunktion</i></p> <p>Die Ableitung der Kosinusfunktion kann nun ohne grundsätzlich neue Herleitung erschlossen werden. Es ergibt sich:</p> $\cos'(x) = -\sin(x).$ <p><b>Aufgabe 2:</b> <i>Begründen Sie diese Regel ohne Bezug auf die oben stehende Herleitung, sondern nur mit Hilfe der Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion.</i></p> <p><b>Aufgabe 3:</b> <i>Begründen Sie diese Regel unter Verwendung der oben stehende Herleitung.</i></p> <p>Die Tangensfunktion wird definiert durch</p> $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$ <p>Ihre Ableitung ergibt sich daher mit Hilfe der Quotientenregel aus denen der Sinus- und der Kosinusfunktion.</p>	<p><i>Unterrichtsabschnitt 3</i></p>

### 3.4.1 Zur Streckung des Kreises mit infinitem Faktor

Streng genommen muss für die Richtigkeit der nebenstehenden Herleitung sichergestellt werden, dass die *Strecke*  $\overline{PQ}$  sich nur infinitesimal von der *Bogenlänge*  $dx$  unterscheidet (der Bogen  $PQ$  lässt sich in dieser Vergrößerung nicht von der Strecke  $\overline{PQ}$  unterscheiden).

Daher zeigt die folgende Abbildung den vergrößerten Ausschnitt nochmals, jedoch mit einem reellen positiven Zuwachs  $h$ . Hier werden die Unterschiede zwischen dem Kreis und der Tangente in  $P$  deutlich und die Sehne  $\overline{PQ}$  wird überhaupt erst bemerkt. Sie bildet die Hypotenuse des eigentlich

zu betrachtenden Dreiecks, nicht der Kreisbogen oder die Tangente  $t$ . Ihre Länge  $w$  ist kleiner als die Bogenlänge  $h$ , also  $w = h - z_1$  mit positivem  $z_1$ . Ferner liegt zwischen der Sehne und der Vertikalen durch  $Q$  ein um  $z_2$  größerer Winkel vor als  $x$  zwischen der Tangente und dieser Vertikalen.



Die Länge der Ankathete ist der zu  $h$  gehörige Unterschied  $v$  zweier Sinuswerte.

Hieraus ergibt sich  $v = w \cdot \cos(x + z_2) = (h - z_1) \cos(x + z_2)$ .

Zu untersuchen ist also

$$\frac{v}{h} = \frac{h - z_1}{h} \cdot \cos(x + z_2).$$

Zur Bestimmung einer Ableitung muss  $h$  infinitesimal und verschieden von null gewählt werden. Zusammen mit dem Unterschied zwischen Kreis und Tangente sind dann auch  $z_1$  und  $z_2$  infinitesimal, und zwar sogar infinitesimal im Verhältnis zu  $h$ . Das bedeutet für  $z_1$ , dass es eine infinitesimale Zahl  $\alpha$  gibt und  $z_1 = \alpha \cdot h$  gilt. Daher wird

$$\frac{v}{h} = \frac{h - h\alpha}{h} \cdot \cos(x + z_2) = (1 - \alpha) \cdot \cos(x + z_2).$$

Nunmehr lässt sich die gesuchte Ableitung  $\sin'(x)$  als reeller Teil (Standardteil) ablesen:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \text{rt}\left(\frac{v}{h}\right) = \text{rt}((1 - \alpha) \cdot \cos(x + z_2)) \\ &= \text{rt}((1 - \alpha)) \cdot \text{rt}(\cos(x + z_2)) = 1 \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Gleichung  $\text{rt}(\cos(x + z_2)) = \cos(\text{rt}(x + z_2)) = \cos(x + 0)$  benutzt, denn die Kosinusfunktion ist bei  $x$  stetig.

### 3.5 Einstieg in Exponentialfunktionen [Ba]

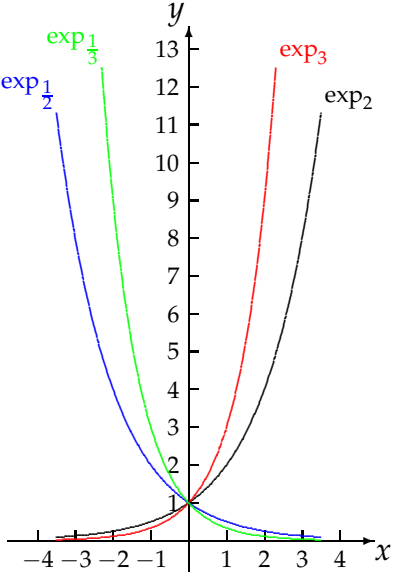
Die Exponentialfunktionen sind eine neue Klasse von Funktionen. Bei ihnen sind gegenüber den bisher betrachteten Potenzfunktionen die Rollen



von Basis und Exponent vertauscht. Der Unterricht beginnt, wie schon in der *Standardanalysis* üblich, mit der Betrachtung solcher Funktionen mit verschiedenen Basen, um deren Eigenschaften zu ermitteln.

Die Ableitung wird dann mit den inzwischen bekannten Mitteln der *Nichtstandard-Analysis*, also aus den Koordinaten zweier infinitesimal benachbarter Punkte des Graphen, errechnet. Die Erkenntnis, im Ableitungsterm die Funktion selbst wiederzufinden, motiviert die Suche nach einer Basis, bei der der Faktor bei der Ableitung verschwindet, also gleich 1 ist.

Diese spezielle Basis  $e$  wird mit den Mitteln der *Nichtstandard-Analysis* auf anschauliche Weise errechnet.

<i>Eine neue Klasse von Funktionen</i>	<i>Schritt 1</i>
<p>Funktionen, bei denen die Variable im Exponenten auftritt, nennt man</p> <p style="text-align: center;"><i>Exponentialfunktionen.</i></p> <p>Bezeichnung: <math>\exp_a</math> mit <math>\exp_a(x) = a^x</math>.</p> <p>Offenbar gibt es viele Exponentialfunktionen, die sich alle in der Basis <math>a</math> unterscheiden. Welche Basen möglich und erlaubt sind, wird gleich erörtert.</p> <p>Zunächst einige Graphen:</p>  <p>Die wichtigsten Eigenschaften:</p>	<p><i>Der Unterricht beginnt also so, wie man ihn aus der Standardanalysis kennt.</i></p> <p>Genau wie andere Funktionen, z.B. <math>\sin</math> oder <math>\ln</math>, haben auch Exponentialfunktionen je nach Basis <math>a</math> eine eigene Bezeichnung: <math>\exp_a</math>.</p>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alle Graphen verlaufen oberhalb der <math>x</math>-Achse.</li> <li>• Der Punkt <math>(0;1)</math> liegt auf allen Graphen.</li> <li>• Die <math>x</math>-Achse ist Asymptote, d. h. die Graphen nähern sich ihr, ohne sie je zu erreichen.</li> <li>• Die Graphen zweier Exponentialfunktionen verlaufen spiegelbildlich zur <math>y</math>-Achse, wenn ihre Basen Kehrzahlen voneinander sind.</li> </ul> <p>Kann jede reelle Zahl <math>a</math> Basis einer Exponentialfunktion sein?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Beispiele zeigen nur Graphen mit positiven Basen.</li> <li>• Wäre <math>a = 1</math>, dann verlief der Graph parallel zur <math>x</math>-Achse durch den Punkt <math>(0;1)</math>. Er wäre einfacher beschrieben mit <math>f(x) = 1</math>. Schon deshalb kann <math>a = 1</math> entfallen. Der wichtigere Grund ist aber, dass eine Funktion <math>\exp_1</math> nicht umkehrbar wäre.</li> <li>• Entsprechendes gilt für <math>a = 0</math>. Der Graph hätte sogar eine Lücke bei <math>(0;0)</math>, denn die Potenz <math>0^0</math> ist nicht definiert.</li> <li>• Negative Basen sind sinnlos, denn dann müssten auch Terme wie <math>(-3)^{\frac{1}{2}}</math> erklärt sein.</li> </ul> <p>Also sind Exponentialfunktionen zu definieren als <math>\exp_a</math> mit</p> $\exp_a(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad a \neq 1.$	<p>Natürlich können noch viele weitere Eigenschaften von Exponentialfunktionen zusammengetragen werden.</p> <p>Das Thema Umkehrung von Funktionen ist in der Regel noch nicht im Unterricht besprochen und bleibt insofern nur angedeutet.</p>
---	--

<i>Ableitung von Exponentialfunktionen</i>	<i>Schritt 2</i>
<p>Wie üblich wird die Steigung zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten des Graphen ermittelt. Der reelle Teil davon ist dann die Ableitung der Funktion.</p> <p>Seien also <math>P_1(x; \exp_a(x))</math> und <math>P_2(x + \alpha; \exp_a(x + \alpha))</math> zwei Punkte des Graphen einer Funktion <math>\exp_a</math>, deren <math>x</math>-Werte sich um ein infinitesimales <math>\alpha</math> unterscheiden. Dann erhält man für die Steigung zwischen diesen Punkten und dann für die Ableitung</p> $m = \frac{dy}{dx} = \frac{\exp_a(x + \alpha) - \exp_a(x)}{(x + \alpha) - x}$ $= \frac{a^{x+\alpha} - a^x}{\alpha} = \frac{a^x \cdot a^\alpha - a^x}{\alpha} = a^x \cdot \frac{a^\alpha - 1}{\alpha},$ $\exp'_a(x) = a^x \cdot \text{rt}\left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}\right).$ <p>Exponentialfunktionen besitzen also sich selbst als Ableitung, aber multipliziert mit einem von der Basis <math>a</math> (und von <math>\alpha</math>) abhängigen Faktor.</p> <p>Welchen Wert besitzt der Faktor, mit dem <math>\exp_a</math> beim Ableiten zu multiplizieren ist? Der Faktor ist offenbar ein Quotient von der Struktur <math>\frac{\text{infinitesimal}}{\text{infinitesimal}}</math>. Ob er einen reellen Teil besitzt und wenn ja, welchen, bedarf einer genaueren Untersuchung.</p> <p>Schätzt man seinen Wert ab, indem man z.B. statt des infinitesimalen <math>\alpha</math> den Wert 0,001 nimmt, dann erhält man zum Beispiel für die Basen 2 und 3</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\exp'_2(x) \approx 0,6934 \cdot \exp_2(x)</math></li> </ul> <p>und</p>	<p>Hier kommt nun der Gedanke der Nichtstandard-Analysis ins Spiel.</p> <p>„rt“ steht wieder für den reellen Teil (Standardteil) des hyperreellen Ergebnisses.</p>

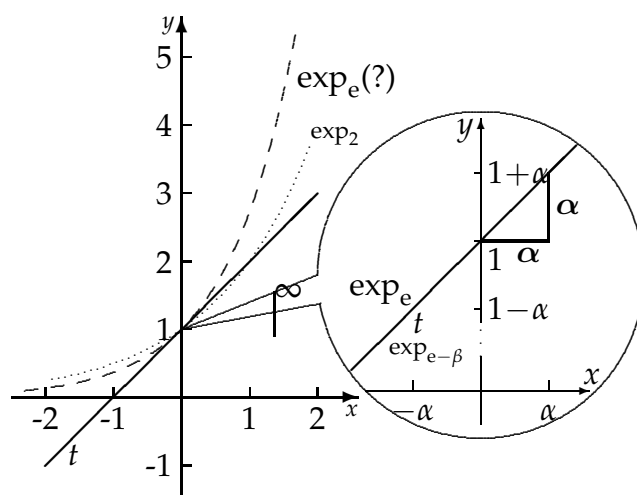
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\exp'_3(x) \approx 1,099 \cdot \exp_3(x)</math></li> </ul> <p>(sowie die entsprechenden negativen Werte für <math>\exp_{\frac{1}{2}}</math> und <math>\exp_{\frac{1}{3}}</math>).</p> <p>Es entsteht die Frage, ob man eine Basis finden kann, bei der der Faktor verschwindet, also den Wert 1 annimmt. Der Wert dieser Basis müsste nach obigen Abschätzungen zwischen 2 und 3 liegen. Dann hätte man eine Funktion, die tatsächlich sich selbst als Ableitung besitzt. Diese Basis soll nun gesucht werden.</p> <p><i>Die besondere Basis e</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zunächst soll die gesuchte reelle Basis die Bezeichnung <b>e</b> erhalten, weil es sich um eine spezielle <u>Exponentialbasis</u> handelt.</li> <li>• Es soll <math>\operatorname{rt}\left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right) = 1</math> gelten, d.h. der reelle Teil (Standardteil) des beim Ableiten entstehenden Terms soll infinitesimal benachbart zu 1 sein: <math>\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1</math>.</li> <li>• Diese „<math>\simeq</math>“-Beziehung wäre nach e aufzulösen.</li> <li>• Das ist aber nicht allgemein möglich, wie man sich an folgendem Beispiel klarmachen kann: <math>\frac{\Omega - 1}{\Omega} \simeq 1</math>, aber <math>\Omega - 1 \not\approx \Omega</math>.</li> </ul>	<p>Hier ist es durchaus empfehlenswert, mit verschiedenen (natürlich nicht infinitesimalen) Einsetzungen für <math>\alpha</math> zu experimentieren, damit die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung entwickeln können, was bei sukzessiver Verkleinerung der Einsetzung geschieht.</p> <p><i>Schritt 3</i></p> <p>Hier kann auf den Ursprung der Bezeichnung e hingewiesen werden, wie sie von Euler eingeführt wurde. Der Name „Eulersche Zahl“ ist späteren Datums.</p>
---	--

- Um es dennoch tun zu können, ist eine Seite der Beziehung geeignet infinitesimal zu verändern, damit aus der infinitesimalen Nachbarschaft eine Gleichung wird.

Das gelingt mit den folgenden Überlegungen.

- Da die Funktion  $\exp_e$  sich selbst als Ableitung besitzt, gilt für jedes  $x$ , dass dort die Funktion selbst und ihre sämtlichen Ableitungen denselben Wert haben.
- Mit  $\exp_e(0) = e^0 = 1$  muss auch die Tangente an den Graphen in  $(0; 1)$  die Steigung 1 besitzen.

Damit ist die Tangente in der folgenden Graphik bereits festgelegt, sie besitzt die Gleichung  $t(x) = x + 1$ .



Der Punkt  $(\alpha; 1 + \alpha)$  kann kein gemeinsamer Punkt von Graph und Tangente sein, denn  $(0; 1)$  ist es bereits. Der Unterschied der  $y$ -Werte der Funktionen  $\exp_e$  und  $t$  in  $(0, 1)$  ist aber im infinit vergrößerten Bild nicht zeich-

Die Unendlichkeitslupe  $|\infty$  zeigt an, dass mit einem infiniten Faktor vergrößert wird.

Das gilt auch für die Funktion  $\exp_{e-\beta}$ , allerdings sei  $\beta$  so gewählt, dass der Graph von  $\exp_{e-\beta}$  auch durch  $(\alpha; 1 + \alpha)$  verläuft.

enbar, denn er ist auch bezüglich des hier verwendeten Vergrößerungsfaktors  $\frac{1}{\alpha}$  infinitesimal.

Der im unvergrößerten Bild punktierte Graph von  $\exp_2$  zeigt nun den Weg, aus der Beziehung  $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1$  eine Gleichung zu machen.

- Je kleiner die Basis ist, desto flacher verläuft der Graph einer Exponentialfunktion für positive  $x$ .
- Die Tangente von  $\exp_e$  ist deshalb Sekante von  $\exp_2$ . Sie besitzt also einen weiteren Schnittpunkt mit  $\exp_2$ .
- Umgekehrt muss es somit eine Exponentialfunktion geben, deren Graph im vergrößerten Bild durch die Punkte  $(0; 1)$  und  $(\alpha; 1 + \alpha)$  verläuft.
- Die Basis dieser Funktion kann nur infinitesimal kleiner als  $e$  sein, also zum Beispiel  $e - \beta$ ,  $\beta > 0$ .
- Auch der Graph von  $\exp_{e-\beta}$  ist im vergrößerten Bild dieselbe Linie wie die für  $\exp_e$  und für  $t$ .

Dann gilt für  $x = \alpha$  die Gleichung

$$\exp_{e-\beta}(\alpha) = t(\alpha),$$

die nach  $e$  aufzulösen ist:

$$\begin{aligned} (e - \beta)^{0+\alpha} &= 1 + \alpha \\ e - \beta &= (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Zahlen, die nicht reell sind, denn  $e$  ist als reelle Zahl vorausgesetzt.

Deshalb enthält die Vergrößerung bereits die Bezeichnung  $\exp_{e-\beta}$ .

Für die Diskussion dieser Gedanken sollte den Schülerinnen und Schülern durchaus Zeit gegeben werden.

Es ist eine geometrisch-anschauliche Begründung für die infinitesimale Korrektur, die aus der Beziehung  $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1$  die Gleichung  $\frac{(e-\beta)^\alpha - 1}{\alpha} = 1$  macht. Dieses Verfahren kommt Lernenden entgegen.

Ein auch rechnerisch einwandfreier Nachweis für die Auflösbarkeit der Beziehung  $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1$  nach  $e$  wird im zweiten Teil gezeigt.

Die entstehende Gleichung entspricht der Beziehung  $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1$ .

Da  $\alpha$  beliebig ist, kann man es auch gleich dem Kehrwert einer hypernatürlichen Zahl setzen, also  $\alpha = \frac{1}{\Omega}$ , und man erhält

$$e - \beta = \left(1 + \frac{1}{\Omega}\right)^{\Omega}.$$

Der reelle Teil (Standardteil) beider Terme ergibt dann die Gleichung, die die gesuchte Exponentialbasis  $e$  definiert:

$$e = \text{rt}\left(1 + \frac{1}{\Omega}\right)^{\Omega}.$$

Wo ist  $e$  auf einer Zahlengeraden zu suchen? Um diese Frage zu beantworten, ist eine Dezimalschreibweise zu finden. Da  $\Omega$  nicht wie eine Dezimalzahl eingesetzt werden kann, nimmt man stattdessen eine möglichst große natürliche Zahl. Deswegen kann eine Dezimalangabe für  $e$  nie exakt sein.

Die folgende mit dem Taschenrechner ermittelte Tabelle zeigt, bei welchen Einsetzungen  $n$  statt  $\Omega$  wieviel Dezimalstellen für  $e$  gesichert sind.

$n$	Näherungswert
10	2,593742460
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
10000000	2,718281693

Mit modernen Rechenanlagen erfährt man heute zum Beispiel

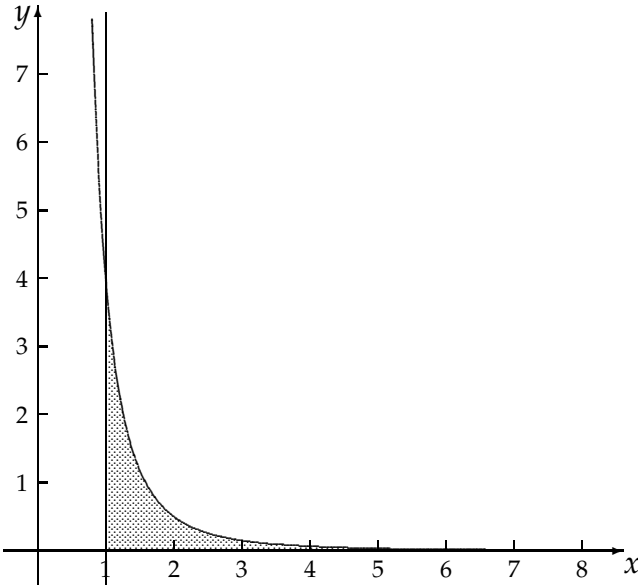
$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369996....$$

*Hervorgehoben* sind jeweils die Ziffern, die sich gegenüber dem vorhergehenden Wert nicht mehr verändert haben.

### 3.6 Uneigentliches Integral [F/H]

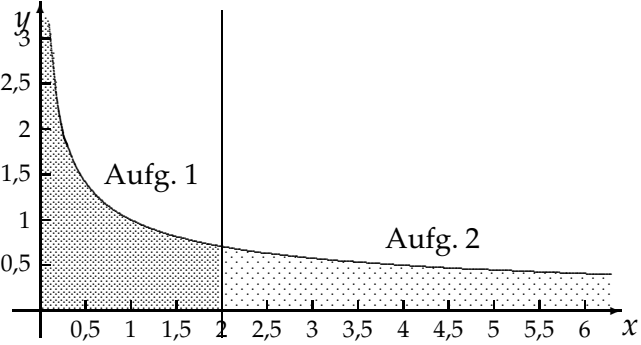
Im Folgenden wird eine kurze Unterrichtssequenz zum „Uneigentlichen Integral“ vorgestellt, die sich an die Behandlung des Integrals (s. Abschnitt 2.2) anschließen kann. Auch hier kommt man ohne die üblichen Grenzwertprozesse aus. Die aus der *Standard-Mathematik* bekannten Grenzwerte können mit Hilfe der hyperreellen Zahlen exakt **berechnet** werden.

Von einem „uneigentlichen Integral“ spricht man, wenn entweder der Integrationsweg oder der Integrand im Integrationsintervall unbeschränkt ist, aber das Integral dennoch existiert, d.h. endlich ist (konvergiert).

Unterrichtsgang Uneigentliches Integral	Kommentar
<p data-bbox="244 801 472 837"><i>Einstiegsaufgabe:</i></p> <p data-bbox="244 878 884 1099"><i>Liz und ihr Freund Fritz beschäftigen sich gerne mit mathematischen Fragestellungen. So hat Liz gehört, man könne in einem Gedankenexperiment mit einem Pinsel und einer 750ml-Farbdose (Ergiebigkeit: <math>9\text{m}^2</math>) ein Flächenstück anstreichen, das sich bis ins Unendliche(!) erstreckt!</i></p>  <p data-bbox="244 1798 884 1944"><i>Es geht um die Fläche <math>A</math>, die von dem Graphen der Funktion <math>f(x) = \frac{4}{x^3}</math>, der Geraden <math>x = 1</math> und der <math>x</math>-Achse begrenzt wird. (Einheit: <math>1\text{m}</math>). Kann das sein?</i></p>	<p data-bbox="917 1144 1297 1218">Zu erwartende Äußerungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="917 1227 1297 1330">– Wie soll das gehen, wenn ich unendlich weit laufen muss?</li> <li data-bbox="917 1339 1297 1442">– Da brauche ich doch sicher auch unendlich viel Farbe!</li> <li data-bbox="917 1451 1297 1554">– Allerdings wird das Flächenstück ja immer schmäler ...</li> <li data-bbox="917 1563 1297 1637">– Das, was dazu kommt, wird immer weniger ...</li> <li data-bbox="917 1646 1297 1984">– Da war doch was: Wir müssen „infini“ weit laufen, aber der Zuwachs an Fläche ist „infinitesimal“ – und das Produkt „infini · infinitesimal“ kann alles Mögliche ergeben. Das müssen wir genauer untersuchen ...!</li> </ul>



<i>Unterrichtsgang Uneigentliches Integral</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Wie könnte der Dialog zwischen Liz und Fritz aussehen?</p> <p><u>Problem:</u> Die Variable <math>x</math> wird beliebig groß. Die Fläche dehnt sich längs der <math>x</math>-Achse bis ins Unendliche aus!</p> <p><u>Idee:</u> Wir integrieren von 1 bis zu der unendlich großen oberen Grenze <math>\Omega</math> – und setzen am Ende der Rechnung <math>\frac{1}{\Omega} = \alpha</math>:</p> $\begin{aligned} \int_1^{\Omega} \frac{4}{x^3} dx &= \int_1^{\Omega} 4 \cdot x^{-3} dx \\ &= \left[ \frac{4}{-2} \cdot x^{-2} \right]_1^{\Omega} \\ &= -2 \cdot \Omega^{-2} - (-2) \cdot 1 \\ &= -\frac{2}{\Omega^2} - (-2) = -2\alpha^2 + 2 \\ &= 2 - 2\alpha^2 \end{aligned}$ <p>Der reelle Teil dieser finiten Zahl stellt den gesuchten Flächeninhalt <math>A</math> dar. Also</p> $A = \text{rt}(2 - 2\alpha^2) = 2.$ <p><i>Kommentar:</i> Die Gleichungskette oben zeigt, dass die Integralfunktion <math>\int_1^x \frac{4}{x^3} dx</math> nach dem Transferprinzip (S. 40) ins hyperreelle fortgesetzt ist. Im Unterricht muss dieser Transfer nicht thematisiert werden.</p> <p><i>Antwort auf die Einstiegsaufgabe:</i> Berücksichtigt man die Einheiten, so handelt es sich bei dem Flächeninhalt um <math>2\text{m}^2</math>. Die Farbe reicht tatsächlich bei Weitem aus, um die Fläche zu streichen. Die Farbdose wird niemals leer, obwohl man unendlich weit läuft! Was es in Mathe alles gibt ...!</p>	<p>Auch in der <i>Standard-Analysis</i> ist dieses Beispiel üblich. Rein formal ergibt sich kein wesentlicher Unterschied zur bekannten Vorgehensweise:</p> $\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \frac{4}{x^3} dx \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z 4 \cdot x^{-3} dx \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{4}{-2} \cdot x^{-2} \right]_1^z \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} [-2z^{-2} - (-2) \cdot 1]_1^z \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}$ <p>Während man jedoch hier mit „streben“ und „annähern“ argumentieren muss – was auch immer sich Schülerinnen und Schüler darunter vorstellen –, kann in der <i>Nichtstandard-Analysis</i> die Fläche direkt <b>berechnet</b> werden.</p> <p>Interessante Diskussionen können hier entstehen, wenn von Schülerseite etwa hinterfragt wird, ob da nicht immer noch ein Stück Fläche fehle, wenn man „nur“ bis <math>\Omega</math> integriert; man könne ja</p>

<i>Unterrichtsgang Uneigentliches Integral</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Übungsaufgabe 1: Berechne den Inhalt der Fläche <math>A</math>, die vom Graphen der Funktion <math>f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}</math>, von der Geraden <math>x = 2</math> und beiden Koordinatenachsen im 1. Quadranten begrenzt wird.</p>  <p><b>Problem:</b> Die Funktion ist für <math>x = 0</math> nicht definiert. Die gesuchte Fläche dehnt sich längs der <math>y</math>-Achse bis ins Unendliche aus! <b>Idee:</b> Analog zur Einführungsaufgabe integrieren wir nun von der <u>unendlich kleinen unteren Grenze <math>\alpha</math></u> bis 2:</p>	<p>auch bis <math>(\Omega + 1)</math> oder <math>10\Omega</math> oder überhaupt bis zur infiniten Zahl <math>\Gamma &gt; \Omega</math> integrieren. Dem ist entgegenzuhalten, dass sich etwa im Falle <math>\Gamma &gt; \Omega</math> gemäß durchgeführter Integration dasselbe Ergebnis ergibt: <math>A = rt(2 - \frac{2}{\Gamma^2}) = 2</math>. Es ist also korrekt, beim Lösen dieses Problems immer <i>irgendeinen</i> Repräsentanten einer infiniten Zahl bei der oberen Integrationsgrenze zu wählen, da die „fehlende“ Restfläche stets einen infinitesimalen Inhalt besitzt.</p> <p>In der <i>Standard-Analysis</i> wird analog zur Einstiegsaufgabe diesmal zunächst von <math>z</math> (<math>0 &lt; z &lt; 2</math>) bis 2 integriert. Man erhält einen von <math>z</math> abhängigen Term und lässt dann <math>z</math> „gegen 0</p>

<i>Unterrichtsgang Uneigentliches Integral</i>	<i>Kommentar</i>
$\int_{\alpha}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_{\alpha}^2 x^{-0,5} dx = \left[ \frac{1}{0,5} \cdot x^{0,5} \right]_{\alpha}^2$ $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\alpha}$ <p>Der reelle Teil der finiten Zahl ist der gesuchte Flächeninhalt; also</p> $A = \text{rt}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\alpha}) = 2\sqrt{2}.$ <p>In beiden betrachteten Aufgaben wächst der Flächeninhalt nicht über alle Grenzen hinaus, obwohl entweder der Integrationsweg unbegrenzt ist oder die Funktion im betrachteten Intervall unbeschränkt ist. Er ist endlich, lässt sich exakt berechnen und wird als <b>uneigentliches Integral</b> bezeichnet. Mindestens eine Integrationsgrenze ist in diesen Fällen nicht reell, sondern echt hyperreell.</p> <p>Übungsaufgabe 2: Berechne den Inhalt der Fläche <math>A</math>, die vom Graphen der Funktion <math>f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}</math>, von der Geraden <math>x = 2</math> und der <math>x</math>-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird.</p> <p>Skizze: s. Aufgabe 1</p>	<p>streben“, während in der <i>Nichtstandard-Mathematik</i> der Flächeninhalt wieder direkt <b>berechnet</b> wird.</p> <p>Auch hier könnte hinterfragt werden, ob nicht ein Stück Fläche zwischen <math>y</math>-Achse und <math>x = \alpha</math> fehle. Wie im Kommentar oben bereits geschildert, wird man hier entsprechend eine beliebige infinitesimale Untergrenze <math>\beta</math> mit <math>\beta &lt; \alpha</math> wählen – die Integration führt dann zu</p> $A = \text{rt}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\beta})$ $= 2\sqrt{2},$ <p>also zum gleichen Ergebnis, da auch hier die fehlende Restfläche infinitesimal ist.</p> <p>Bei der Lösung dieses Aufgabentyps darf man folglich immer einen beliebigen Repräsentanten einer infinitesimalen Zahl bei der unteren Integrationsgrenze wählen, da die „fehlende“ Restfläche immer infinitesimal ist.</p> <p>Abschließend empfiehlt es sich, noch ein Beispiel wie dieses zu betrachten, bei dem der Flächeninhalt tatsächlich unbegrenzt ist.</p>

<i>Unterrichtsgang Uneigentliches Integral</i>	<i>Kommentar</i>
<p>Wir bilden ein Integral analog zur Einführungsaufgabe:</p> $\int_2^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_2^{\Omega} x^{-0,5} dx = \left[ \frac{1}{0,5} \cdot x^{0,5} \right]_2^{\Omega}$ $= 2\sqrt{\Omega} - 2\sqrt{2}.$ <p>Diese Zahl ist infinit und damit ist auch der Flächeninhalt unbegrenzt. Das zugehörige uneigentliche Integral existiert demnach nicht!</p>	

### 3.7 Limes-Schreibweise und Nichtstandard [F]

Sowohl in gängigen Lehrwerken als auch in Klausur- und zentralen Abituraufgaben findet man die Limes-Schreibweise. Diese wird in der *Standard-Mathematik* im Zusammenhang mit dem „propädeutischen Grenzwertbegriff“ bzw. dem „inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriff“ (übliche Formulierungen in den Lehrplänen der verschiedenen Bundesländer) in der Schule verwendet, um das „Streben“ oder „sich Nähern“ von  $x$ -Werten gegen bestimmte reelle Zahlen oder auch  $\pm\infty$  zu bezeichnen.

In der *Nichtstandard-Mathematik* ist diese Limes-Schreibweise nicht zwingend nötig. Doch damit Schülerinnen und Schüler, die auf diese Weise unterrichtet werden, bei entsprechenden Prüfungen keine Nachteile erleiden, muss erklärt werden, wie diese Schreibweise in der *Nichtstandard-Mathematik* gedeutet wird.<sup>2</sup>

Betrachten wir folgende Beispielaufgabe:

Bestimme  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ .

Wie geht der *Standard-Mathematik*-Schüler vor?

Er bemerkt beim „Annähern“ an 2, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0 „streben“. Ein unbestimmter Ausdruck ist entstanden. Theoretisch könnte er nun mit den Regeln von De L'Hospital weiterkom-

<sup>2</sup>Es sei auch auf den Artikel von W. Lingenberg über die Äquivalenz von Folgentrenzwerten und Standardteil hingewiesen: Mitteilungen der GDM 106 (2019), S. 14-17 und <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/842/837>.

men, doch diese stehen ihm in Klasse 11 vermutlich nicht zur Verfügung. Ein guter Schüler erinnert sich womöglich, dass beim Vorhandensein der Zählernullstelle 2 ein Linearfaktor der Form  $(x - 2)$  in der Zählerfunktion vorliegen muss:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

$$\text{Also: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)$$

Er setzt nun (nicht korrekt!) den Wert 2 in  $(x - 1)$  ein und erhält schließlich

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$$

Ein Schüler, dem die o.g. Linearfaktorzerlegung nicht geläufig ist, wird eventuell das Problem dadurch zu lösen versuchen, indem er „dicht“ bei 2 gelegene Werte, wie etwa 2,1 oder 2,01 oder 1,99 in die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  einsetzt und dann beobachtet, ob sich die zugehörigen Funktionswerte einer bestimmten Zahl „annähern“.

Obige Beispielaufgabe könnte für einen *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler etwa folgendermaßen lauten:

Untersuche, wie sich die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  verhält, wenn man sich in infinitesimaler Umgebung von 2 befindet.

Der Schüler setzt (korrekt!) die hyperreelle Zahl  $(2 + \gamma)$  mit  $\gamma \simeq 0, \gamma \neq 0$  in  $f(x)$  ein (Anmerkung: Rein formal erinnert dieses Vorgehen an dasjenige, das im Standard-Fall als letztes beschrieben wurde – dort aber kann der Schüler nur „vermuten“, dass der Grenzwert 1 ist, aber exakt beweisen kann er es auf diese Weise nicht):

$$\begin{aligned} f(2 + \gamma) &= \frac{(2 + \gamma)^2 - 3(2 + \gamma) + 2}{(2 + \gamma) - 2} = \frac{4 + 4\gamma + \gamma^2 - 6 - 3\gamma + 2}{\gamma} \\ &= \frac{\gamma + \gamma^2}{\gamma} = 1 + \gamma \simeq 1 \end{aligned}$$

$\implies$  Die Funktionswerte von  $f(x)$  liegen in infinitesimaler Nähe zu 1, wenn sich  $x$  in infinitesimaler Nähe zu 2 befindet.

Also liegt für den *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler folgende Vereinbarung nahe:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1 \quad \text{bedeutet:} \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \simeq 1, \text{ wenn } x \simeq 2 \text{ und } x \neq 2.$$

Betrachten wir eine weitere typische Aufgabe aus der *Standard-Mathematik*:

Bestimme  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3}$ .

Der *Standard-Mathematik*-Schüler formt um:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}}.$$

Er wendet die im propädeutischen Sinne erwähnten und notwendig unbewiesenen Grenzwertsätze für Funktionen an und erhält weiter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also insgesamt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = 0$ .

Der *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler soll das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$$

untersuchen, wenn  $x$  infinit wird.

Er setzt eine infinite Zahl  $\Gamma$  mit  $\Gamma \gg 1$  in  $f(x)$  ein, formt um und rechnet(!) weiter:

$$f(\Gamma) = \frac{2\Gamma+1}{\Gamma^2-3} = \frac{\Gamma^2(\frac{2}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2})}{\Gamma^2(1 - \frac{3}{\Gamma^2})} = \frac{\frac{2}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2}}{1 - \frac{3}{\Gamma^2}}.$$

Sowohl die beiden Summanden im Zähler als auch der zweite im Nenner sind infinitesimal, so dass gilt:

$$f(\Gamma) \simeq \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\implies$  Die Funktionswerte von  $f(x)$  sind infinitesimal, wenn  $x$  infinit wird.

Also liegt für den *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler folgende Vereinbarung nahe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = 0 \quad \text{bedeutet:} \quad \frac{2x+1}{x^2-3} \simeq 0, \text{ wenn } x \gg 1.$$

**Allgemein:**

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g; a, g \in \mathbb{R} \iff f(a + \gamma) \simeq g$  für infinitesimale  $\gamma \neq 0$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g; g \in \mathbb{R} \iff f(\Gamma) \simeq g$  für infinite  $\Gamma$ .

**Übungen (Nichtstandard):**

1. Bestimme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x} - 2}{\frac{3}{x} + 1}$

Lösung:  $f(\gamma) = \frac{\frac{5}{\gamma} - 2}{\frac{3}{\gamma} + 1} = \frac{\frac{5-2\gamma}{\gamma}}{\frac{3+\gamma}{\gamma}} = \frac{5-2\gamma}{3+\gamma} \simeq \frac{5-0}{3+0} = \frac{5}{3}$  und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x} - 2}{\frac{3}{x} + 1} = \frac{5}{3}$$

2. Bestimme  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

Lösung:  $f(\Gamma) = \frac{2\Gamma^2 + 1}{\Gamma - 3} = \frac{\Gamma(2\Gamma + \frac{1}{\Gamma})}{\Gamma(1 - \frac{3}{\Gamma})} = \frac{2\Gamma + \frac{1}{\Gamma}}{1 - \frac{3}{\Gamma}}$

Der Zähler ist infinit, der Nenner infinitesimal benachbart zu 1; also ist  $f(\Gamma)$  infinit, und damit existiert der gesuchte Grenzwert nicht!

3. Bestimme  $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(25 + \gamma) &= \frac{\sqrt{25 + \gamma} - 5}{(25 + \gamma) - 25} = \frac{\sqrt{25 + \gamma} - 5}{\gamma} \\ &= \frac{\sqrt{25 + \gamma} - 5}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{25 + \gamma} + 5}{\sqrt{25 + \gamma} + 5} \\ &= \frac{(25 + \gamma) - 5^2}{\gamma(\sqrt{25 + \gamma} + 5)} = \frac{\gamma}{\gamma(\sqrt{25 + \gamma} + 5)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25 + \gamma} + 5} \simeq \frac{1}{\sqrt{25 + 0} + 5} = \frac{1}{10} \quad \text{und damit} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} = \frac{1}{10}$$

**Abschließende Bemerkung:**

Vergleicht man das Vorgehen beim Lösen der aufgeführten Beispiele und Übungen in der *Standard-* und *Nichtstandard-Mathematik* miteinander, so erkennt man im rein formalen Vorgehen durchaus Übereinstimmungen; allerdings verwendet die *Standard-Mathematik* den propädeutischen Grenzwertbegriff mit all seinen Folgerungen und muss demzufolge auf unklare Begriffe wie „streben“ und „sich nähern“ zurückgreifen, wohingegen in der *Nichtstandard-Mathematik* die Grenzwerte exakt berechnet werden können!



# Kapitel 4

## Grenzwertprozesse oder infinitesimale Zahlen? Ein Vergleich. [Be]

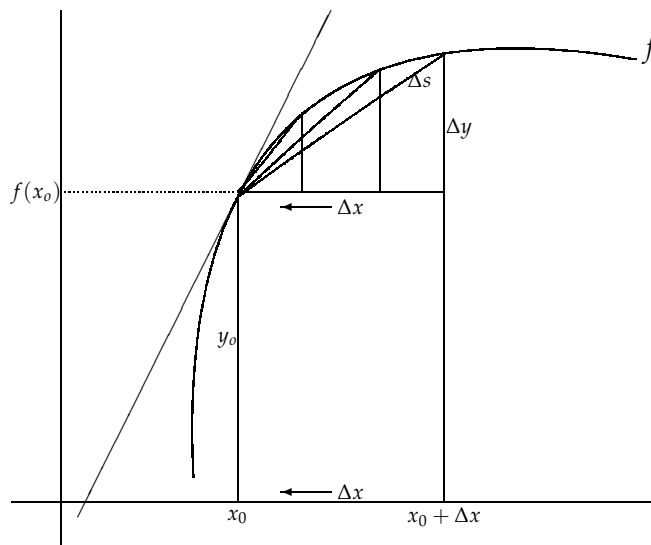
### 4.1 Gegenüberstellung

Es geht um den Kern, um die Grundgedanken und Grundvorstellungen, in beiden Zugängen in die elementare Analysis. Im Abschnitt 2.1 ist in der Kommentarspalte der Zugang über Grenzprozesse zur Ableitung bereits neben den Unterrichtsgang mit infinitesimalen Zahlen gestellt. Wir skizzieren hier die Ansätze noch einmal knapp und wiederholen so notwendig manches, verweisen für Details aber auf das Kapitel 2. Unser Ziel ist, die prinzipiellen Unterschiede der Zugänge erkennbar zu machen und Vorteile und Nachteile gegeneinander abzuwägen.

#### 4.1.1 Ableitung

Man denke z.B. an eine Einstiegssituation wie in 2.1 im Unterrichtsgang. Wie ein Einstiegsproblem auch immer aussieht, es wird um eine reelle Funktion gehen, man wird eine Veranschaulichung suchen und einen Funktionsgraphen zeichnen. Wir orientieren uns an der geometrischen Interpretation einer Problemstellung, die über Sekantendreiecke (die Steigungen oder Zuwächse veranschaulichen) zur Vorstellung einer Tangente in einem Punkt und zur Tangentensteigung führen soll.

Sei  $f$  die reelle Funktion. Wie gehen wir vor, wenn wir an Grenzwerte denken? Gewöhnlich entsteht ein Bild wie das folgende.



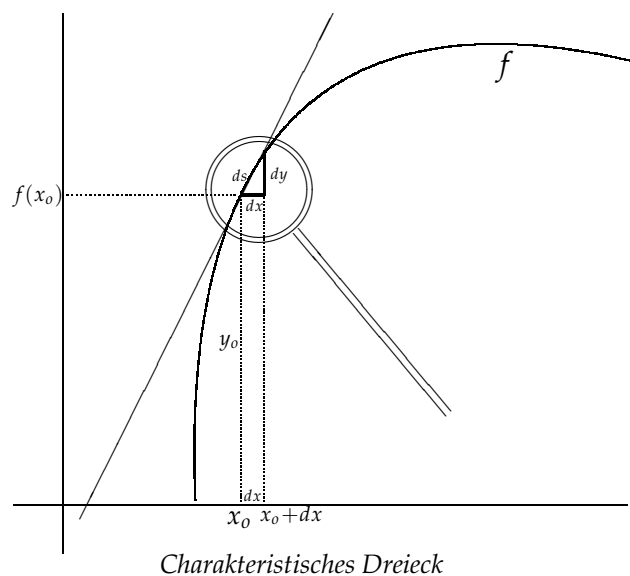
Das Bild zeigt: Die Hypotenusen von immer kleiner werdenden Sekantendreiecken nähern sich in einem unendlichen Prozess dem Funktionsgraphen. Wir denken, dass Schülerinnen und Schüler sich vorstellen, wie die Hypotenusen sich dabei der gesuchten Tangente nähern. Im unendlichen Prozess verschwinden die Sekantendreiecke samt Hypotenuse im Berührungspunkt  $(x_0, f(x_0))$  der gesuchten Tangente. Zugleich, so sollen Schülerinnen und Schüler denken, strebt der Differenzenquotient  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  gegen die Steigung der Tangente. Das ist das Ziel, der Grenzwert, der dann *Ableitung* von  $f$  bei  $x_0$  heißt. Mit der Punktsteigungsformel wird die Tangente bestimmt.

Die Heuristik beginnt im infinitesimalen Zugang wie im Grenzwerteinstieg mit dem Annäherungsprozess der Sekantendreiecke. Man denkt nur anders: Die Sekantendreiecke verschwinden *nicht*. Sie „enden“ quasi, wie in der folgenden Abbildung, in einem unendlich kleinen Dreieck mit infinitesimalen Seiten  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ , das man sich geometrisch vorstellt. Es ist das alte „charakteristische Dreieck“, mit dem vor 350 Jahren alles begann und das wir in der Abbildung auf der folgenden Seite sehen.

Im Unterricht kommt die Idee des unendlich Kleinen von den Schülerinnen und Schülern. Die Veranschaulichung des Dreiecks  $(dx, dy, ds)$  gehört ganz natürlich dazu. Das unendlich Kleine war historisch keine bloße Fiktion und ist es auch für Schülerinnen und Schüler nicht. Es ist eine geometrische Idee, die die endlichen Idealisierungen in der Geometrie fortsetzt. Die „Unendlichkeitslupe“, die die infinitesimalen geometrischen Verhältnisse sichtbar macht, ist kein methodischer Trick, sondern legitim. Das zeigt K. Kuhlemann im Abschnitt 6.2 für stetig differenzierbare Funktionen.

Heuristisch beginnt, das haben wir eben gesehen, der infinitesimale Weg wie der Grenzwertweg, mit einem unendlichen Prozess kleiner werdender Sekantendreiecke. Ist das unendlich kleine Dreieck aber erst einmal „da“,

braucht der infinitesimale Einstieg den unendlichen Prozess nicht mehr. Nicht allein ein reiner Zahlenwert, der Grenzwert, der die Steigung der Tangente angibt, ist das Ziel des infinitesimalen Zugangs. Das Ziel ist zwar auch dieser Wert, als Standardteil des Differentialquotienten  $\frac{dx}{dy}$ , aber zusätzlich geht es um die „sichtbare“ Steigung, nämlich die der Hypotenuse im unendlich kleinen Sekantendreieck. Die Hypotenuse ist Teil der Tangente *und* der Kurve. – So hat als erster Leibniz gedacht, der Kurven als Zusammensetzung von unendlich kleinen Linien auffasste.



So verschieden die Vorstellungen sind, so wenig unterscheiden sich zunächst die beiden Zugänge im Rechnen. Der Unterschied ist nur, dass man auf dem Grenzwertweg mit den Differenzen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , im infinitesimalen Zugang mit den *Differentials*  $dx$ ,  $dy$  rechnet. Das Standardbeispiel  $f(x) = x^2$  ist in 2.1 ausgeführt, einmal mit  $dx$  im Unterrichtsgang und daneben im Kommentar mit  $\Delta x$ . Gravierend wird der Unterschied im Rechnen später, wenn es um Regeln der Differentiation geht.

Der Rechenweg im Grenzwertzugang schließt mit einer Grenzwertbildung, der Rechenweg mit infinitesimalen Zahlen schließt mit der Bildung des Standardteils oder des „reellen Teils“, wie wir im Unterricht auch sagen können. Der Übergang zum Standardteil ist ein arithmetischer Schritt über die arithmetische Relation  $\simeq$ , aber durchaus auch verknüpft mit der Vorstellung,  $dx$  nach dem Rechnen schließlich gegen Null streben zu lassen. So scheint Cauchy gedacht zu haben, wie wir im Rückblick zeigen werden.

In der Standardanalysis spricht man vom Differentialquotienten, ein Relikt aus Leibniz' Zeiten, und synonym von der Ableitung. Man verwendet die Bezeichnung „ $\frac{dy}{dx}$ “, obwohl  $dy$  und  $dx$  reine Schreibfiguren sind und nur

einen Erinnerungswert an die im Grenzwertprozess verschwundenen Differenzen  $\Delta x, \Delta y$  besitzen. Im infinitesimalen Zugang erhält der Differentialquotient seine wahre Bedeutung zurück.  $dx, dy$  sind infinitesimale Zahlen und bilden den Quotienten.

### 4.1.2 Zum Rechnen mit infinitesimalen und infiniten Zahlen

Wir skizzieren für die Zwecke hier kurz das Nötigste zum Rechnen mit den neuen Zahlen. Im Detail entwickelt ist das Rechnen im Abschnitt 2.3. Wie haben wir eben mit den infinitesimalen Zahlen gerechnet? Wir haben das Rechnen mit reellen Zahlen naiv auf die neuen infinitesimalen Zahlen  $dx, dy$  fortgesetzt. Das ist das Prinzip, nach dem wir auch im Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen vorgehen.

Zuerst: Eine neue Zahl  $\alpha$  soll infinitesimal und positiv heißen, wenn sie größer als Null, aber kleiner ist als jede positive reelle Zahl:

$\alpha$  ist eine positive **infinitesimale** Zahl, wenn gilt:  $\alpha > 0$  und  $\forall r \in \mathbb{R}^+ (\alpha < r)$ .

Wir schreiben  $\alpha \simeq 0$ .

Die Differentiale  $dx$  sind solche infinitesimalen Zahlen und werden so geschrieben, weil sie in Verbindung mit reellen Zahlen  $x$  auf der  $x$ -Achse gedacht und dargestellt werden.

Da  $dx$  unendlich klein ist, liegen  $x$  und  $x + dx$  **unendlich nah** beieinander.

Wir schreiben:  $x + dx \simeq x$ .

**Finite Zahlen** sind nicht infinitesimale Zahlen  $\gamma$  mit  $\gamma < n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Der Schlüssel für den Übergang vom Hyperreellen zum Reellen ist der

**Standardteil:**

- Jede finite hyperreelle Zahl  $\gamma$  liegt unendlich nah zu genau einer reellen Zahl  $r$ :  $\gamma \simeq r$ .  $r$  heißt der Standardteil von  $\gamma$ .

Eine wichtige Rechenregel ist:

Ist  $r$  eine reelle Zahl und  $\eta$  eine finite Zahl, dann gilt:

$$r \cdot dx \simeq 0 \text{ und } \eta \cdot dx \simeq 0.$$

Ist eine hyperreelle Zahl  $\alpha$  unendlich klein, dann ist  $\frac{1}{\alpha}$  infinit, unendlich groß, d.h. größer als jede reelle Zahl:

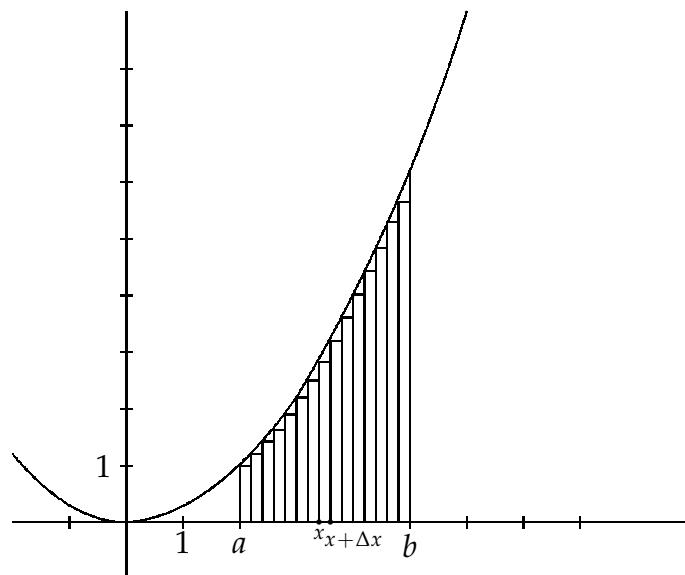
Eine Zahl  $\mu$  heißt **infini**t, wenn gilt:  $\forall r \in \mathbb{R}(\mu > r)$ . Wir schreiben  $\mu \gg 1$ .

In allen möglichen arithmetischen Kombinationen mit den reellen Zahlen gehören die neuen, infinitesimalen und infiniten Zahlen zum erweiterten Bereich  ${}^*\mathbb{R}$  der **hyperreellen Zahlen**.

Damit sind die arithmetischen Grundlagen geschaffen. Das Rechnen mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu entwickeln, ist selbst in Grundkursen gut möglich. Praktische Erfahrungen zeigen dies.<sup>1</sup> Unser Abschnitt 2.3 gibt Hinweise für einen Aufbau der Arithmetik im Unterricht.

### 4.1.3 Integral

Wir orientieren uns wieder am Beispiel. Die übliche Veranschaulichung aus der Praxis der Einführung des Riemann-Integrals sieht so aus:



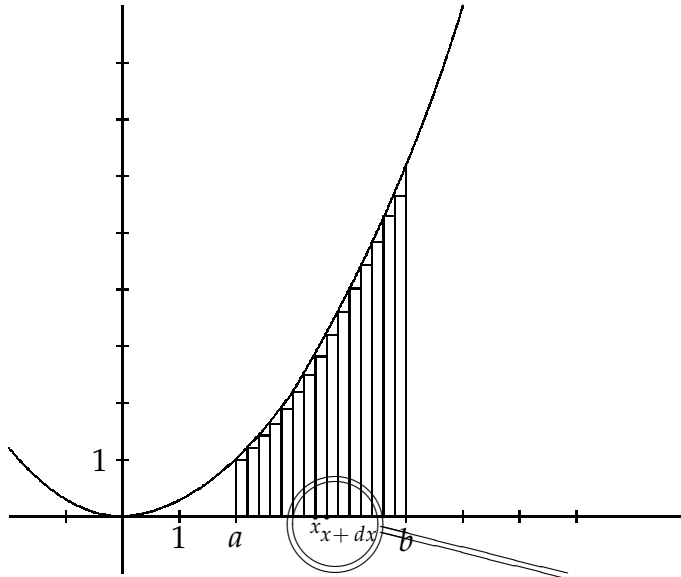
Dies ist eine Momentaufnahme, so denken wir heute und so sollen unsere Schüler denken, beim Verschwinden der  $\Delta x$ , verbunden mit der Vorstellung, dass sich verschwindende Rechteckflächen in ihrer Summe einer Fläche nähern, deren Inhalt das bestimmte Integral ist.

Wir versuchen jetzt, anders zu denken – so wie Leibniz sich die Situation vorstellte. Die Heuristik ist die gleiche: Sie beginnt im infinitesimalen Zugang wie eben, mit einem Prozess, den man sich vorstellt, in dem Rechteckflächen immer schmäler werden. Jetzt aber verschwinden die Rechteckflächen *nicht*. Sie „enden“ quasi in unendlich kleinen Rechteckflächen. Das müssen dann *infini*t viele sein.

Der Unterschied im folgenden Bild ist minimal: Aus  $\Delta x$  wird  $dx$ . Wir sind aber nicht mehr in einem Prozess, in dem  $\Delta x$  gegen 0 strebt, sondern

<sup>1</sup>s. Basiner (2019), Dörr (2017), Fuhrmann/Hahn (2019), Heinsen (2019)

sind in einem festen Zustand:  $dx$  ist unendlich klein. Wir nehmen uns wieder die Unendlichkeitslupe und sehen unendlich schmale Streifen der Breite  $dx$ :



Die Summe der infinit vielen, sagen wir  $\mu$ , Rechteckflächen *ist* (bis auf einen unendlich kleinen, also vernachlässigbaren Unterschied) der gesuchte Flächeninhalt, das bestimmte Integral.

Wir betrachten ein *Beispiel*: Der Graph oben stamme von  $f(x) = x^2$ . Wir setzen  $a = 0$ .

- Dann ist  $x_k = k \cdot dx$  und  $b = \mu \cdot dx$ .
- Der Flächeninhalt eines Rechteckstreifens von  $x_k$  bis  $x_k + dx$  ist

$$dx \cdot f(x_k) = dx \cdot (x_k)^2 = dx \cdot (k \cdot dx)^2.$$

- Die Fläche unter der Kurve ist

$$\sum_{k=1}^{\mu} (k \cdot dx)^2 \cdot dx = dx^3 \cdot \sum_{k=1}^{\mu} k^2.$$

In Abschnitt 2.2 wird dieses Beispiel genau durchgerechnet. Wesentlich dabei ist die Rechenregel für reelle und finite hyperreelle Zahlen: Es ist  $r \cdot dx \simeq 0$  für jedes  $r$ . Das bekannte Rechnen mit  $\Delta x$  beim Grenzwertzugang, das genauso aussieht, wird hier zum Rechnen mit  $dx$ . Für uns Lehrende, nicht so sehr für Lernende, ist vielleicht der infinite Summationsindex irritierend, der an die Stelle von  $\infty$  im Grenzwertzugang getreten ist.  $\infty$  verlangt nach dem Rechnen einen doppelten Grenzprozess, den von  $n \rightarrow \infty$  und  $\Delta x \rightarrow 0$ . An seine Stelle tritt im infinitesimalen Zugang der arithmetische Übergang zum Standardteil.

Im Kern – mit den Bezeichnungen in den obigen Abbildungen – verläuft für gewöhnliche Funktionen, wie sie in der Schule vorkommen, die Definition des Riemannsches Integrals grob so:

$dx$  sei unendlich klein. Also ist  $\mu$ , die Zahl der Intervalle, unendlich groß.

Dann ist  $a + \mu \cdot dx = b$ ,  $x_k = a + k \cdot dx$ .

Der Flächeninhalt der Streifen ist  $dx \cdot f(x_k)$ .

Die Fläche unter der Kurve ist  $\sum_{k=0}^{\mu} f(a + k \cdot dx) \cdot dx$ .

Das Integral  $\int_a^b f(x)dx$  ist der Standardteil dieser unendlichen Summe.

Wir bemerken: Das Integral ist, so wie es historisch war, wieder eine Summe – bis auf die infinitesimale Abweichung. Die Anzahl der Summanden ist unendlich und die Summe dennoch arithmetisch berechnet. Das erweist sich, wie wir im Unterrichtsgang gesehen haben, als äußerst effektiv. Man denke an den Beweis des Hauptsatzes, den wir in einer Skizze in 2.2 quasi *sahen* und gleich noch einmal sichtbar machen.

## 4.2 Vergleich

Gravierend ist von vornherein:

Der Grenzwertzugang beruht in der Schule weitgehend auf einer unklaren Propädeutik des Grenzwertbegriffs.

Den Grenzwerten stehen unendliche Prozesse gegenüber, die in der Regel – nicht nur – von Schülern als potentiell unendlich, d.h. als offen aufgefasst werden.

Es bleibt eine Kluft zwischen den Grenzwerten und den unendlichen, nicht endenden Prozessen (vgl. Bedürftig (2018), Abschnitt 4.).

Beim infinitesimalen Zugang ist das anders.

Dem infinitesimalen Zugang liegt eine klare, mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitete Arithmetik zugrunde.

Nach der Heuristik, die offen unendliche Prozesse beobachtet, fällt die Problematik des „aktual“ Unendlichen weg, das Mengen und Prozesse als Ganze setzt.

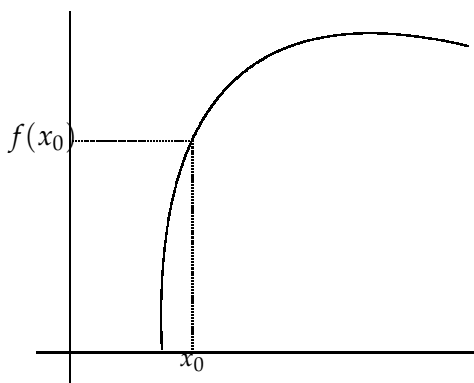
Der letzte Satz ist überraschend. Es muss vorsichtiger heißen: Die Problematik des Unendlichen verlagert sich. Sie wird in die *Arithmetik* versetzt. Das Unendliche ist, wenn die Arithmetik erarbeitet ist, arithmetisch erfasst. Denn:

Das Unendliche ist in den infiniten und infinitesimalen Zahlen arithmetisch gegeben.

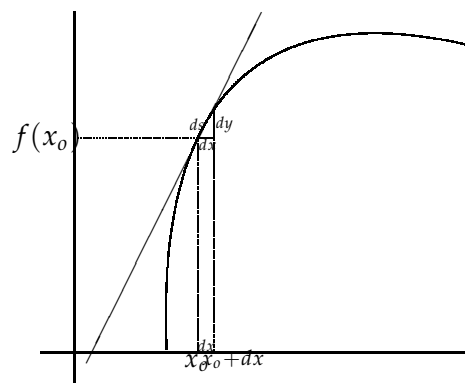
Es geht im infinitesimalen Zugang nicht um unendliche Mengen, die abstrakt als abgeschlossene Ganze zu denken sind, und nicht um offen-unendliche Folgen, die wie fertige Mengen behandelt und wie beendet gedacht werden müssen. Die infiniten Zahlen, mit denen man rechnet, sind das Unendliche. Das ist eine gravierend andere Situation. Die infiniten Zahlen bilden gerade das Instrument, Unendliches zu erfassen. Beispiel: Die unendlichen Mengen infinitesimaler Intervalle beim Integral durch eine infinite Anzahl  $\mu$ .

Die Erarbeitung der Arithmetik ist grundlegend. Dass sie auch in Grundkursen zu bewältigen ist, zeigen Folien aus dem Unterricht (vgl. Basiner (2019), Fuhrmann/Hahn (2019), Heinsen (2019)). Aus einem Leistungskurs berichtet Dörr (2017).

Ein anderes wesentliches Unterscheidungsmerkmal der beiden Zugänge kommt aus der *Anschauung* – ganz abgesehen von der Problematik des Grenzwertes. Wie ist es beim Differenzieren mit der Anschaulichkeit bestellt? Oben haben wir in beiden Zugängen den unendlichen Prozess der kleiner werdenden Sekantendreiecke skizziert. Wir machen ein Gedankenexperiment und sehen uns die beiden „Endergebnisse“ des Grenzprozesses an:



Sekanten-Dreiecke,  $\Delta x \rightarrow 0$ , „Endstation“



Sekanten-Dreiecke,  $\Delta x \rightarrow dx$ , „Endstation“

Im Grenzwertzugang bleibt anschaulich nur der Punkt übrig, mit dem man begonnen hat und in dem man sich eine Tangente vorstellen soll. Für die Schüler verschwindet die Anschauung der Hypotenusen der Sekantendreiecke im Nichts. Was bleibt, ist die Idee einer Tangente und die Idee eines Zahlenwerts als Grenzwert von Zahlenverhältnissen – und die Kluft zwischen Prozess und Wert.

Im infinitesimalen Zugang bleibt die Anschauung erhalten. Die Heuristik des Prozesses wird mit der Idee, der *Vorstellung*, des unendlich Kleinen abgeschlossen. Das infinitesimale Steigungsdreieck ist anschaulich *da*,

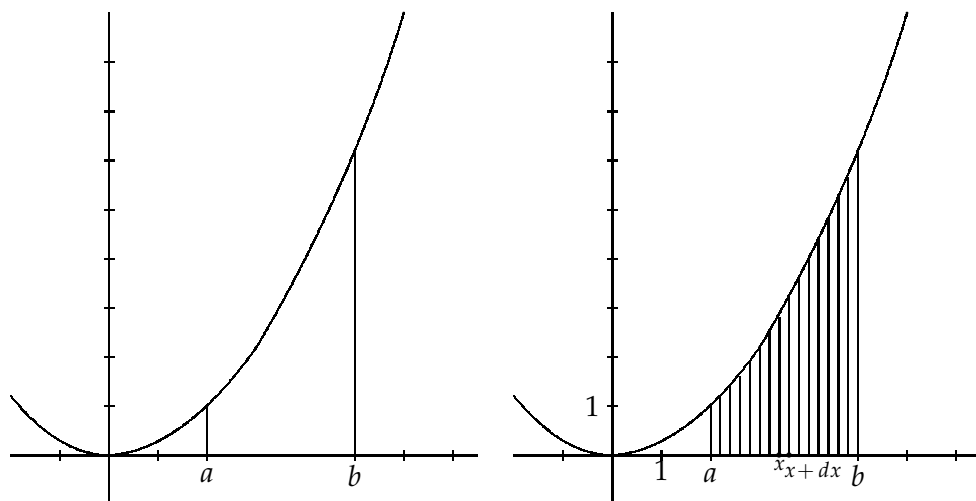


in dem man die Steigung sehen *und* berechnen kann: die Steigung der unendlich kleinen Hypotenuse, die Teil der Tangente *und* der Kurve ist. – Wir weisen auf Leibniz hin, der Kurven als Zusammensetzung von unendlich kleinen Linien beschrieb (Teil II, Abschnitt 6.3), und daran, dass es mathematisch legitim ist, unendlich Kleines sichtbar zu machen (Teil II, Abschnitt 6.1).

Da die Anschauung einen großen Stellenwert im Lernprozess hat, so muss man den infinitesimalen Zugang als methodisch überlegen ansehen. Die Einstiege zur Ableitung und zum Integral beginnen hier mit anschaulichen Grenzprozessen, die aber den abstrakten Grenzwertformalismus nicht brauchen, sondern in eine anschaulich-geometrische Situation münden, aus der eine Arithmetik entsteht. Grenzprozesse werden dann nicht mehr gebraucht, aber sie sind auch nicht verloren.

Prozesse sind und bleiben im Unterricht notwendig präsent, wenn es um Näherungen geht oder um die Darstellung reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche (zu deren Problematik s. Bedürftig (2018), 4.3). Sie werden zudem interessant, wenn man die Repräsentation hyperreeller Zahlen durch unendliche Folgen thematisieren will (vgl. 6.4), die sich zwanglos und für Schüler interessant aus der  $0,999\dots$ -Frage ergibt (s. 3.1). Am Ende läuft dies auf die Äquivalenz von Grenzwert und Standardteil heraus (s. 6.5).

Wir stellen jetzt, im nächsten Gedankenexperiment, die „Endzustände“ der Veranschaulichungen des Riemann-Integrals im Grenzwert- und infinitesimalen Zugang einander gegenüber:

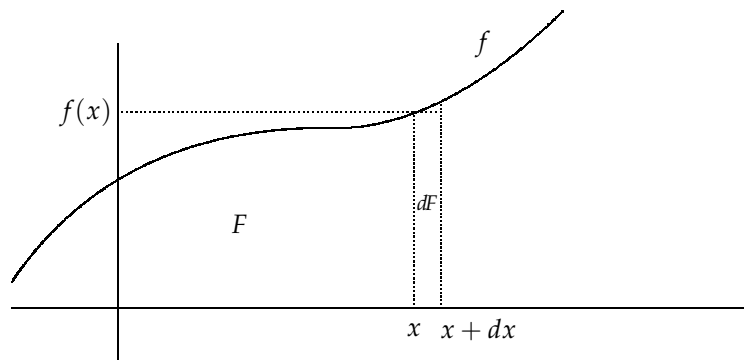


*Integral standard, „Endstation“  $\Delta x = 0$     Integral nonstandard, „Endstation“  $dx$*

Hier entspricht das anschauliche Ergebnis im Grenzwertzugang ganz unserer Vorstellung der Fläche unter der Kurve zwischen  $a$  und  $b$ . Die Streifen  $f(x) \cdot \Delta x$  und deren Summation sind verschwunden. Im Zugang mit infinitesimalen Zahlen bleibt hingegen eine Differenz zu dieser Fläche, und

in der Tat ist die infinite Summe der infinitesimalen Streifen hyperreell und die reelle Fläche „nur“ deren Standardteil. Der gravierende Vorteil im infinitesimalen Zugang, wie sich beim Hauptsatz zeigt, ist gerade, dass die *Anschauung der Summation* von Flächen und die Summendarstellung *nicht* verschwunden sind. Im Ergebnis ist der Flächeninhalt eine konkrete Summe. Im Grenzwertzugang ist der Flächeninhalt ein gedachter Grenzwert, dem sich ein Prozess von Summationen von verschwindenden Summanden nur nähert. Wie schließlich verschwundene Summanden überhaupt einen positiven Wert bilden können, ist ein Rätsel, das wohl selten diskutiert wird.

Wir erinnern an den Hauptsatz (S. 28) im Abschnitt 2.2, wählen eine etwas andere Skizze im infinitesimalen Zugang und *sehen* quasi den Beweis:



Wir sehen

$$dF = F(x + dx) - F(x).$$

Da  $f$  im Intervall  $[x, x + dx]$  bis auf einen infinitesimalen Fehler konstant ist, ist

$$dF \simeq f(x) \cdot dx,$$

also

- $F'(x) \simeq \frac{dF}{dx} \simeq f(x).$

Diese Argumentation finden wir in einer Aufgabenbearbeitung durch einen Schüler im Unterricht von J. Dörr (Dörr 2017, S. 46). Eine grundsätzliche arithmetische Vorsicht aber ist geboten, da die Relation  $\simeq$  bei Division durch infinitesimale Zahlen nicht notwendig erhalten bleibt. Die Rechnung hier aber ist korrekt, wie man wieder *sieht*.

Denn der Fehler, sichtbar im infinitesimalen Dreieck zwischen Kurve und dem Rechteck  $f(x) \cdot dx$ , ist kleiner als das kleine Rechteck  $dx \cdot dy$ , und das ist infinitesimal gemessen am infinitesimalen Rechteck  $f(x) \cdot dx$ . Denn das Rechteck  $dx \cdot dy$  berechnet sich aus zwei infinitesimalen Strecken, das Rechteck  $f(x) \cdot dx$  aus einer endlichen und einer infinitesimalen Strecke.

Ausgerechnet: Ist  $f$  stetig und  $dy = f(x + dx) - f(x)$ , so ist das Rechteck  $dy \cdot dx$  größer als der infinitesimale Fehler, nämlich der Dreiecksinhalt  $D = dF - f(x) \cdot dx$ . Mit  $D < dy \cdot dx$ , also  $\frac{D}{dx} < dy$  ist  $F'(x) \simeq \frac{dF}{dx} = \frac{f(x) \cdot dx + D}{dx} \simeq f(x)$ .

Im Grenzwertzugang ist der Beweis sehr viel schwieriger und in der Schule fast unerreichbar. Kern des Beweises ist auch hier die „Idee“ (Behrends (2004), S. 95), die oben schon der Beweis ist, nämlich die Betrachtung von  $dF$ . In (Behrends (2004)) z.B. finden wir ein ganz ähnliches Bild wie oben, die Abbildung 6.25. Hier heißt es, dass  $dF$  sich „nur unwesentlich von einem Rechteck mit den Seitenlängen  $dx$  und  $f(x)$ “ unterscheidet. Um genau zu sein: In (Behrends (2004)) steht  $h$  statt  $dx$ . „Die präzise Ausführung der Idee macht keine großen Schwierigkeiten.“ heißt es dann – und geht dann doch über mehr als eine Seite komplizierter Abschätzungen über Fol-gengrenzwerte. „Nur unwesentlich verschieden“ übersetzen wir hingegen ins hyperreelle „ $\simeq$ “ – und sind fertig.

### 4.3 Stetigkeit

Zusätzlich zum Unterrichtsgang sprechen wir hier das Problem des Begriffs der Stetigkeit an, das man unterrichtlich – in der Regel und *zu Recht* – mit Anschauung und Intuition umgeht. Denn in der Frage, was „stetig“ heißt, wird die grundsätzliche Problematik des Grenzwertes deutlich. Es wird deutlich, wieso man sich auf den „propädeutischen Grenzwertbegriff“ zurückzieht, ja zurückziehen muss, und wie Nonstandard hier weiterführt.

Stetigkeit ist das Natürliche. Erst seit im 19. Jahrhundert die Zahlengerade erfunden wurde und das stetige Kontinuum mathematisch in Punkte „zerlegt“ wurde, ist es überhaupt nötig zu sagen, was „stetig“ ist. In der Schule ist es daher schwierig, Stetigkeit zu problematisieren und Schüler zu motivieren, sich mit einem erst mathematisch verursachten, künstlichen Problem zu befassen. Denn Schüler denken natürlich, also stetig. Sie denken weniger an Punkte in einer unendlichen Menge von Wertepaaren einer Funktion  $f$ , sondern an die stetige Kurve. Die Kurve ist *stetig*, wenn sie keine „Sprünge macht“. Das ist Tradition:

„Natura non facit saltus,“

sagten die Alten seit Aristoteles. Alles andere ist pathologisch oder konstruiert.

Oder: Wie kann man Stetigkeit in einem Punkt bezweifeln, wenn wir so denken und es vielleicht auch einmal im Unterricht so sagen: „Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen mit einem Bleistift ohne abzusetzen zeichnen kann.“ Ist das peinlich? Nein. Man denkt so, weil man es so tut. Auch diese Art zu denken hat Tradition:

„Punctum in processu facit lineam,“ (Der Punkt macht im Prozess die Linie,)

sagte man in der Scholastik und dachte an die Bewegung. Zeichnerisch: Man setzt einen Punkt und zieht von ihm aus die Kurve – und nicht etwa eine Menge von Punkten. Wie kann da in einem Punkt, den man in die stetige Kurve setzt, etwas Unstetiges sein?

Das ist die Problematik der Stetigkeit. Die Grenzwertprozesse, mit denen man auf das künstliche Problem losgeht, erscheinen der natürlichen Stetigkeit – künstlich von außen – aufgezwungen. Hierin liegt die Ursache, dass man quasi *kapituliert*. Man zieht sich auf den *propädeutischen* Grenzwert zurück. Wie tut man das? Indem man an die alte, natürliche Anschauung der Linie und der Bewegung appelliert: Man lässt Punkte „fließen“, auf der Linie gegen den Grenzwert „streben“ oder „nähert“ sich ihm. Wir verfolgen einmal das Streben und Nähern.

Beispiel: Wann ist eine Funktion  $f$  stetig in  $x_0$ ?

*Anschaulich:* Wenn  $x$  gegen  $x_0$  strebt, strebt  $f(x)$  gegen  $f(x_0)$ .

*Numerischer Versuch:* Wenn  $x$  minimal ( $\delta$ ) von  $x_0$  entfernt ist, dann ist  $f(x)$  minimal ( $\varepsilon$ ) von  $f(x_0)$  entfernt.

*Neuer Versuch:* Ist  $x$  minimal von  $x_0$  entfernt, dann gibt es  $x'$ , das „minimaler“ entfernt ist. Dann ist auch  $f(x')$  „minimaler“ von  $f(x_0)$  entfernt.

Das Ergebnis solcher Beobachtungen, wie sie vielleicht Schüler formulieren, ist ein prälogischer  $\varepsilon$ - $\delta$ -Dialog zwischen Vorgabe eines  $\varepsilon$  und Suchen eines  $\delta$ .

Das Ziel schließlich ist die *logische* Grenzwertfassung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon).$$

Warum ist dieses Ziel kaum erreichbar?

Das stetige Streben wurde zum numerischen Dialog. Im Dialog liegt noch ein Prozess, der in die Definition der Stetigkeit über Folgen führt. Von ihm geht es weiter in die Statik, die statisch-logische  $\forall$ - $\exists$ -Formulierung, die von der Intuition der Stetigkeit, des Strebens und Fließens, weit entfernt ist. Der letzte Schritt vom Dialog in die Logik ist groß, die Ansprüche an das mathematische Denken gewaltig.

Wie gewaltig, das können wir sehen, wenn wir den Erfindern des Grenzwertes, Cauchy und Weierstraß, auf ihrem Weg zu den Grenzwerten folgen (s. Bedürftig (2020), Abschnitt 2). Beide haben Infinitesimales und den Grenzwert 0 nicht unterschieden, da ihnen die mathematische Logik und die Mengenlehre fehlte. Diese fehlen unseren Schülerinnen und Schülern

ebenso und zeigen die gewaltige, eigentlich unüberwindliche Hürde zum Grenzwertbegriff.

Es kommt noch etwas hinzu, das der Intuition der Stetigkeit eines Graphen einer Funktion  $f$  in einem ausgewählten Punkt widerspricht. Das Ziel der Charakterisierung der Stetigkeit über Grenzwerte ist gar nicht die Stetigkeit *in* dem Punkt  $P = (x_0, f(x_0))$  der Kurve, sondern *bei* dem Wert  $x_0$ , also um  $x_0$  und damit um  $P = (x_0, f(x_0))$  „drumherum“.

Im infinitesimalen Zugang passiert hier etwas Besonderes. Man kann eine natürliche Intuition von Stetigkeit *in* einem Punkt erfassen. Der infinitesimale Zugang akzeptiert die Auflösung der Kurve in reelle Punkte und definiert die Stetigkeit *in* den Punkten der Kurve. Er erfasst die anschauliche Vorstellung

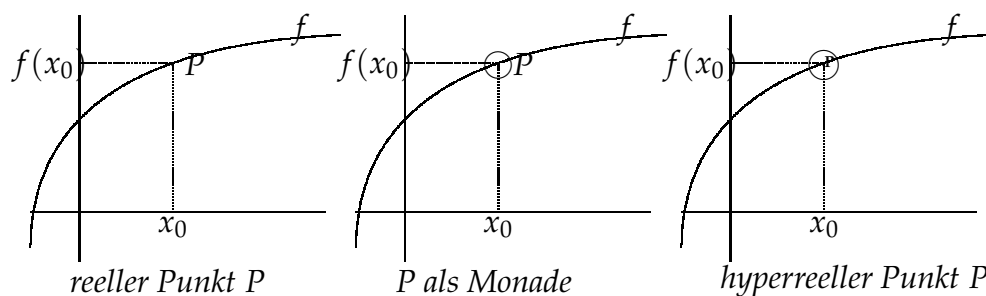
„ $f$  ist stetig *im* Punkt  $P = (x_0, f(x_0))$ , wenn man beim Zeichnen der Kurve im Punkt  $P$  nicht absetzt.“

Wie geschieht das? Wir erinnern uns an die erweiterte Zahlengerade (s. 3.3).

Wir sehen den *reellen* Punkt auf dem Graphen.

Wenn wir genauer hinsehen, sehen wir diesen Punkt als eine „*Monade*“ von hyperreellen Punkten.

Der reelle Punkt wird zum *hyperreellen* Punkt in dieser Monade:



Dass der Bleistift jetzt im reellen Punkt  $P$  nicht absetzt, bedeutet, dass der Graph innerhalb der Monade „keine Sprünge“ macht, genauer: „keine großen Sprünge“. Infinitesimal ist erlaubt.

- **Definition:**

$f$  ist stetig in  $x_0$ , wenn  $f(x) \simeq f(x_0)$  für alle  $x \simeq x_0$ .

Anschaulich: Alle  $(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$  sind hyperreelle Punkte in der Monade von  $P$ .

Der numerische Versuch oben, über minimale Abstände zu sprechen, bekommt jetzt Sinn:

Wenn  $x$  minimal ( $dx$ ) von  $x_0$  entfernt ist, dann ist  $f(x)$  minimal ( $dy$ ) von  $f(x_0)$  entfernt.

In (Bedürftig (2020)) wird Weierstraß zitiert, der es 1861 so sagte:

„Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments ( $dx$ ) unendlich kleinen Änderungen der Funktion ( $dy$ ) entsprechen, so sagt man, dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument.“

Diese infinitesimale Definition der Stetigkeit ist äquivalent zur  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition (Laugwitz (1986), S. 126).

## 4.4 Rückblick

Wir haben die beiden Zugänge zur Analysis miteinander verglichen und dabei an wesentlichen Stellen die Vorteile des arithmetischen Zugangs bemerkt, betonen aber noch einmal, dass wir dafür plädieren, Grenzwerte *und* Infinitesimalien zu thematisieren und zu diskutieren. Auch wenn sich im Unterricht die Waage zu der Seite der Infinitesimalien neigen sollte, was wir für naheliegend halten, wird der „propädeutische Grenzwertbegriff“ nicht verdrängt. Er behält seinen intuitiven Wert.

Beides machen? Wo soll man die Zeit dafür hernehmen? Wie wir es sehen, braucht der „propädeutische Grenzwertbegriff“ selbst kaum Zeit, da er neben Redeweisen über „Nähern“ und „Fließen“ nur Veranschaulichungen und vielleicht dynamische Software verwendet. Zeit braucht der abstrakte Grenzwertformalismus, die formal bleibenden und einzuübenden Schreibweisen und, wenn man sie denn versucht zu führen, die Beweise der Grenzwertsätze. Sie ersticken quasi im Formalismus. Von all dem kann man sich befreien und die „verlorene“ Zeit einsparen, indem man die intuitiven Grenzwertvorstellungen in hyperreelle Zahlen und ihre Arithmetik übersetzt und die Grenzwertsätze wie die Differentiationsregeln ausrechnet. Vor diesem Hintergrund kann eine Ahnung für den Sinn der Grenzwertformalismen entstehen.

Denn Grenzwerte und das unendlich Kleine liegen nicht so weit auseinander, wie man denkt. Es sei an Weierstraß und Cauchy erinnert, Väter der Grenzwerte, die lange beides zugleich dachten. Charakteristisch ist dieses Cauchy-Zitat (1821):

„Wenn die ein und derselben Veränderlichen nach und nach beigelegten numerischen Werte beliebig so abnehmen, dass sie kleiner als jede gegebene Zahl werden, so sagt man, diese Veränderliche wird unendlich klein oder: sie wird eine unendlich kleine Zahlgröße.“

Eine derartige Veränderliche hat die Grenze 0.“

Das hierin liegende Prinzip nennen wir

- *Cauchy-Prinzip*

- Im Prozess der Näherung an 0 bei einer unendlich kleinen Zahl halt machen.
- Rechnen.
- Zur Grenze 0 übergehen, d.h. den *Standardteil* bilden.

Bei der Einführung des Integrals wird der Übergang zur unendlich kleinen Zahl sehr deutlich: Im Prozess der verschwindenden  $\Delta x$  ändert man „irgendwann“ die Sicht- und Schreibweise: Aus  $\Delta x$  wird  $dx$ . Beim Differenzieren hält der Differentialquotient den Grenzprozess der Differenzenquotienten quasi an. Aus der Grenzwertbildung wird die Bildung des Standardteils.

Man gewinnt viel: Steigungen können nicht mehr nur als Grenzwerte „im Unendlichen“ erahnt werden, sie sind ganz anschaulich Verhältnisse von – unendlich kleinen – Seiten. Das Integral kann wieder als Summe begriffen werden. Der Hauptsatz liegt „auf der Hand“. Die Anschaulichkeit ist wieder da, das Verständnis, das leicht in Grenzwertprozessen verloren geht, bekommt eine neue Chance. Differentiationsregeln müssen nicht mehr künstlich über die Hürde der propädeutischen Grenzwertsätze und einen künstlichen Grenzwertformalismus springen. Sie werden *ausgerechnet*. Der mengentheoretisch-logische Grenzwertformalismus erhält ein arithmetisches und anschauliches Gegenüber.

Das neue Rechnen ist ein interessantes Thema im Unterricht, das die Schüler ganz oder weitgehend mitgestalten und diskutieren können. Sie erfinden selbst eine Theorie und verwenden sie, um Änderungsraten, Steigungen, Flächeninhalte und Bilanzen zu erkunden. Sie steigen mit einem selbstgemachten Rüstzeug in die Anfänge der Analysis ein. Beweise werden geführt, nicht, weil sie mathematisch so wichtig sind, sondern weil sie zum Anliegen werden im eigenen Aufbau der hyperreellen Arithmetik. Es geht um Nachhaltigkeit. J. Dörr berichtet (Dörr (2017)), dass Schüler bis zum Abitur auf die infinitesimale Argumentation zurückgriffen, was ihm mit Grenzwertargumenten nicht begegnet sei. Die technischen Vorteile des infinitesimalen Einstiegs sind unübersehbar, wenn wir an die Differentiationsregeln und den Hauptsatz denken. Die geheimnisvolle Manipulation von Zeichen bei der Substitution wird zur arithmetischen Umformung von Gleichungen (vgl. 3.4).

Diesen Vergleichen wird sich niemand wirklich verschließen können. Dennoch gibt es Gegenstimmen, die sich vehement wehren und allein den

Grenzwertweg zulassen. In der Diskussion sieht es oft so aus, als ob es *entweder* um Infinitesimalien *oder* Grenzwerte ginge. Immer ist es so, dass Urteile gefällt werden, ohne die Umgebung des infinitesimalen Einstiegs – oder sogar seine Grundlage, die hyperreelle Arithmetik – wirklich zu kennen. Ein drastisches Beispiel ist der Artikel (Hischer (2017)).

Infinitesimalien und Grenzwerte waren historisch lange Zeit miteinander verbunden. Manche Formulierungen historischer Mathematiker, wie Leibniz, Cauchy und Weierstraß, erinnern an die propädeutisch formulierten Grenzwerte im heutigen Unterricht. Wir können nicht erwarten, dass heutige Schüler, anders als ihre Vorfahren, Infinitesimalien und Grenzwerte gleich begrifflich scharf trennen können. Mathematische Logik und Mengenlehre gab es damals in der Mathematik nicht und gibt es heute in der Schulmathematik nicht. Eine klare Unterscheidung in der Schule ist daher gar nicht möglich. Man muss und kann, und das ist eine **Chance**, mit beidem rechnen – im doppelten Sinne.

## 4.5 Schluss

### 4.5.1 Neu denken

Es ist eine gewisse Herausforderung, sich auf die vielleicht neuen Dinge einzulassen und sich auf Unvorhersehbares einzustellen. Es kann aber auch reizvoll sein, den infinitesimalen Weg auszuprobieren – mit Grenzwerten oder auch ohne sie. Es können interessante Unterrichtsphasen entstehen, wenn man infinitesimale und Grenzwertdenk- und -schreibweisen nebeneinander stellt, beide anwendet und diskutiert. Man muss bereit sein, die gewohnten propädeutischen Grenzwertpfade zu verlassen, wenn die Schülerinnen und Schüler zum Infinitesimalen tendieren. Man muss über einen Schatten springen, so wie es auch die Kolleginnen und Kollegen empfanden, die den Unterrichtsversuch gewagt haben und jetzt Autor\*innen dieser Handreichung sind. Am Ende eines Berichts lesen wir: „Es lohnt – und man lernt immer noch selbst dazu.“ (Fuhrmann/Hahn (2019))

Es gibt noch eine sehr andere Herausforderung, die die Schüler nicht, aber uns trifft. Wir bemerken nämlich, dass unser mathematisches Wissen mit Glaubenssätzen durchsetzt ist. Der erste Satz, der hierher gehört, ist: Grenzwerte sind alternativlos. Dann: Zahlen sind endlich. Wie ist es mit der  $0,999\dots$ -Periode? Überholt Achilles die Schildkröte doch nicht? Der Unterricht, den wir angedeutet haben, hebt zuerst und wie von selbst den alltäglichen mathematischen Glaubenssatz auf:  $\mathbb{R}$  ist die Zahlengerade. Was ist mit den Punkten? Sie werden Monaden. Das sind Mengen von Punkten. Ein Punkt eine Menge von Punkten? Darüber kann man nachsinnen, und das geschieht in (Bedürftig (2015)). Man beginnt, Mathematik anders zu den-



ken.

Mit der Aufhebung der Identifikation von Punkten und reellen Zahlen schwimmen uns manche Gewohnheiten davon, an erster Stelle die gewöhnliche Einführung der reellen Zahlen, die wir vielleicht nicht so offen, aber doch mit ähnlichen Vorstellungen wie die Autoren des Lehrerausbildungslehrbuchs (Padberg (2010), S. 159) vornehmen: „Die reellen Zahlen werden also gleich zu Beginn durch die Gesamtheit **aller** Punkte der Zahlengeraden erklärt und als gegeben angesehen.“ (Fettdruck original im Lehrbuch) Alle Punkte? Es gibt jetzt auch hyperreelle Punkte. Überhaupt löst sich die Punktvorstellung des linearen Kontinuums, der Geraden, auf. Über die Einführung der reellen Zahlen muss offenbar neu nachgedacht werden (s. Bedürftig (2018), Abschnitt 3). Das ist so und hängt nicht davon ab, ob man den infinitesimalen oder den Grenzwertweg in die Analysis geht.

#### 4.5.2 Schlusswort

Worum geht es?

- Es geht um eine tragfähige Basis für die Analysis in der Schule.

Die notwendig propädeutischen Grenzwerte können sie nicht bieten.

Infinitesimale und infinite Zahlen können zur Lösung der Probleme beitragen.

Dazu braucht es eine Zahlbereichserweiterung, die Erweiterung der reellen Arithmetik zu den hyperreellen Zahlen.

Die Arithmetik der hyperreellen Zahlen kann mit Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet werden.

Wir haben einen Unterrichtsgang vorgestellt. Didaktische und methodische Ideen und Argumente haben wir vorgetragen. Wir rufen Sie zur Diskussion und zum Experimentieren auf.



# Kapitel 5

## Literatur und Links

Basiner, S. (2019). *Infinitesimale Größen. Bericht aus dem Unterricht*. Dortmund 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Baumann, P.; Kirski, T. (2016). *Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Mitteilungen der GDM 100 (2016), 6–16.

Bedürftig, T. (2015). *Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Band 5, 1–21.

Bedürftig, T. (2018). *Über die Grundproblematik der Grenzwerte*, Mathematische Semesterberichte 65/2 (2018), 277–298, <https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0>.

Bedürftig, T. (2020). *Infinitesimalien, Grenzwerte und zurück*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 12, erscheint demnächst

Behrends, E. (2004). *Analysis I*. Braunschweig/Wiesbaden 2003 (6. Auflage Heidelberg 2015).

Dörr, J. (2017). *Analysis mit hyperreellen Zahlen – Unterrichtspraktische Erfahrungen aus einem Leistungskurs*. Speyer 2017, [https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien\\_Unterrichtsversuch\\_VA\\_Vallendar\\_08\\_09\\_Juni\\_2017.pdf](https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien_Unterrichtsversuch_VA_Vallendar_08_09_Juni_2017.pdf), aufgerufen: 2.05.2020.

Fuhrmann, V. und Hahn, C. (2019). *Differentialrechnung ohne Grenzwerte, eine Unterrichtsreihe im Grundkurs, Schuljahr 2018/2019*. Worms 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Heinsen, S. (2019). *Einführung der Differentialrechnung ohne Grenzwerte - Erfahrungsbericht aus einem Unterrichtsgang in einem (gymnasialen) Grundkurs*. Bolanden 2019.

<http://www.nichtstandard.de/unterricht.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Hischer, H. (2017). „Grenzwertfreie Analysis“ in der Schule via „Nonstan-

dard Analysis“?, Mitteilungen der GDM 103 (2017); 31–36.

Kirski, T. (2019). *Lehrpläne GK Mathematik*.

<http://www.nichtstandard.de/FAQ.html>, aufgerufen: 2.05.2020.

Kuhlemann, K. (2018a): *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 47–65.

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim; Wien; Zürich 1986.

F. Padberg, R. Danckwerts und M. Stein (2010): *Zahlbereiche*, Heidelberg–Berlin–Oxford 1995 (Nachdruck 2010).

Schmieden, C.; Laugwitz, D. (1958). *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*. Math. Zeitschrift 69, 1–39.

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2007.

## 5.1 Auswahlbibliographie [Ka]

### *Annotierte Auswahlbibliographie*

Manche der folgenden Bücher sind bedauerlicherweise nur noch antiquarisch erhältlich; da sie aber durchaus für Lehrerinnen und Lehrer, die ihre Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung vertiefen und auch um historische und philosophische Aspekte erweitern wollen, empfehlenswert sind, sind sie hier aufgeführt. Verlagsnamen sind in eckigen Klammern angegeben.

1. Baumann, P.; Kirski, T. (2019). *Infinitesimalrechnung – Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Berlin 2019 [Springer Spektrum].

Hierbei handelt es sich um eine komplette Neuüberarbeitung des folgenden, von den Autoren zusammen mit H. Wunderling verfassten und ursprünglich für den Einsatz als Schulbuch konzipierten, darüber aber teilweise deutlich hinausgehenden Werks:

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; Berlin 2007 [DUDEN PAETEC Schulbuchverlag].

2. Bedürftig, T.; Murawski, R.: *Philosophie der Mathematik*. (4. Auflage) Berlin 2019 [de Gruyter].

Dieses Buch ist für jede Lehrerin und jeden Lehrer, der nicht nur Mathematik unterrichten, sondern bei seinen Schülerinnen und Schülern ein wirkliches Verstehen erreichen möchte, ein Gewinn, da es hilft,

sich einen fundierten Überblick über bedeutsame Denker und Themen der Philosophie der Mathematik zu verschaffen, der für ein solches Vorhaben wichtig ist. In Bezug auf die Infinitesimalrechnung ist besonders das Kap. 6 („Infinitesimal denken und rechnen“) empfehlenswert.

3. Keisler, H. J.: *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt].

Keisler, H. J.: *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt]

Bei dem ersten Buch von Keisler handelt es sich um ein grundlegendes Lehrbuch, welches laut Keisler die Infinitesimalrechnung „at the simplest possible level“ behandelt; das zweite Werk von Keisler nimmt demgegenüber einen höheren Standpunkt ein und gibt einen gedrängten Überblick des mathematischen Inhalts des Lehrbuchs, wobei hier auch Sätze bewiesen werden, welche im Lehrbuch unbewiesen bleiben bzw. deren Gültigkeit ohne Beweis vorausgesetzt wird. Beide Bücher können kostenlos als pdf-Dateien auf der Homepage von Keisler (<http://www.math.wisc.edu/~keisler/>) in der aktuellen Fassung heruntergeladen werden. Das Lehrbuch ist in einer Neuauflage von 2012 [Dover] auch noch als Printausgabe im Buchhandel erhältlich.

4. Landers, D.; Rogge, L.: *Nichtstandard Analysis*. Berlin/Heidelberg 1994 [Springer].

Dieses Buch ist seit einem Vierteljahrhundert das umfassendste deutschsprachige Lehrbuch; seine Zielgruppe sind Studierende, welche bereits gewisse Grundkenntnisse der Hochschulmathematik erworben haben, sowie auf Hochschulniveau mathematisch vorgebildete Interessierte. Erwähnenswert sind auch die Teile zur Nichtstandard-Topologie und zur Nichtstandard-Stochastik.

5. Laugwitz, D.: *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim/ Wien/ Zürich 1986 [Bibliographisches Institut]

Detlef Laugwitz, zusammen mit Curt Schmieden ein Pionier der modernen Infinitesimalrechnung, gibt in diesem Buch die reifste Darstellung seines infinitesimalen Zugangs mittels der Omega-Zahlen. Bemerkenswert sind auch seine historischen und philosophischen Bemerkungen und sein Ausblick am Ende des Buches.

Für Lehrerinnen und Lehrer sehr zu empfehlen ist die folgende Internetseite von P. Baumann und T. Kirski: <http://www.nichtstandard.de> Diese Seite

bietet sehr viel Material zum kostenlosen Download an, welches gut im Unterricht eingesetzt werden kann, sowie interessante Tutorials. Dort finden Sie auch eine umfangreiche Literaturliste.