Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Volkhardt Fuhrmann
(Hrsg.)

dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung.

Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Volkhardt Fuhrmann (Hrsg.)

dx, dy

Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung.

Mit Beiträgen von

Peter Baumann [Ba]	*Berlin*
Thomas Bedürftig [Be]	*Hannover*
Volkhardt Fuhrmann [F]	*Worms*
Christine Hahn [H]	*Worms*
Christian Kauferstein [Ka]	*Linz am Rhein*
Thomas Kirski [Ki]	*Berlin*

und Links zu

Stefan Basiner	*Dortmund*
Jochen Dörr	*Speyer*
Stefanie Heinsen	*Bolanden*
Karl Kuhlemann	*Hannover*
Wilfried Lingenberg	*Pirmasens*

Die Handreichung ist aus Lehrerfortbildungen, aus der Unterrichtspraxis und aus Arbeitstreffen mit Kolleginnen und Kollegen hervorgegangen. Das Projekt wird seit 2015 vom Institut für Lehrerfortbildung (ILF) in Mainz unterstützt.

ISBN 978-3-00-065642-2

Berlin, Hannover, Worms 2021

Baumann@nichtstandard.de
beduerftig@idmp.uni-hannover.de
rv.fuhrmann@web.de

Wir widmen die Handreichung unserem Kollegen und Mitautor

Dr. Thomas Kirski,

der im Januar 2021 nach langer Krankheit starb. Wir sind dankbar für die Zeit unserer Zusammenarbeit.

Vorwort

Wir schlagen einen anderen Einstieg in die Schulanalysis vor. Er beginnt, wenn es um die Ableitung und das Integral geht, wie gewöhnlich mit Näherungsprozessen, die aber quasi vor den unerreichbaren Grenzwerten halt machen und bei unendlich kleinen Strecken und Zahlen, den Infinitesimalien, stehen bleiben. Das elementare Rechnen mit den neuen Zahlen löst den schwierigen, abstrakten Grenzwertformalismus ab, und die unendlich kleinen Strecken bieten eine – mathematisch legitime – geometrische Veranschaulichung der Verhältnisse beim Differenzieren und Integrieren. Der „propädeutische Grenzwertbegriff“ kann den Unterricht, den wir vorstellen, begleiten.

Es geht hier in der Handreichung um den Einstieg. Alles Folgende ist wie sonst: Die Arbeit mit den Schulbüchern und Materialien geht weiter, und es gibt keinen Konflikt mit den Richtlinien in Rheinland-Pfalz und den anderen Bundesländern (s. Kap. 5). Wir schlagen diesen Einstieg vor, da wir gute und interessante Erfahrungen im Unterricht gemacht haben. Die gedankliche Nachhaltigkeit ist ein Vorzug unseres Ansatzes. Wir fordern Sie auf, mit unserer Handreichung den eigenen Versuch im Unterricht zu machen.

Der Kern unserer Handreichung ist das Kapitel 2, der Unterrichtsgang (S. 9 - 42). Um konkret zu sehen, was neu – und dass vieles wie gewohnt – ist, können Sie gleich z.B. in den Abschnitt 2.1 zur Ableitung springen oder im Abschnitt 2.3 der Entwicklung der neuen Arithmetik folgen. Oder Sie schlagen einfach nach Ihren Interessen das Heft auf. In der Einleitung, nach dem Inhaltsverzeichnis, geht es um erste Klärungen, eine kommentierende Übersicht und allgemeine Hinweise, zu denen man zurückblättern kann, wenn man ein erstes konkretes Bild gewonnen hat.

Grundlagen unseres Ansatzes, der aus der Nonstandardanalysis kommt, stellen wir in dem Buch

Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard

vor. Wir werden es als (Elemente 2021) zitieren. Dort wird über den historischen und mathematischen Hintergrund berichtet. Standard und Nonstandard werden einander gegenübergestellt, die begrifflichen Verbindungen mit den Grenzwerten untersucht, die Veranschaulichung infinitesimaler Verhältnisse legitimiert und der Nonstandardansatz und der Standardansatz verglichen. Dort, wo es um die Hintergründe unserer praktischen Arbeit geht, werden wir immer wieder in die (Elemente 2021) verweisen.

Berlin *Peter Baumann*
Hannover *Thomas Bedürftig*
Worms *Volkhardt Fuhrmann*

im April 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Hier, in der Handreichung, wird konkret der Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen dargestellt. Von den Gegenständen aus dem mathematischen und historischen Hintergrund unseres Ansatzes handelt das Buch *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard* (Baumann/Bedürftig/Fuhrmann (Hrsg.) 2021). Wir werden es im Folgenden kurz als (Elemente 2021) zitieren.

Gewöhnlich erfolgt der Einstieg in die Analysis über Grenzprozesse und Grenzwerte, das ist Standard. Wir folgen in unserem Zugang dem Ansatz der sogenannten „Nichtstandard-Analysis". „Nichtstandard" hört sich nach „exotisch" oder „verboten" an. Das ist falsch. Richtig ist, dass „Nichtstandard" so mathematisch wie „Standard" ist, – nur nicht der Standard im Unterricht und in der Lehre.

Während wir den neuen Zugang vorstellen, denken wir uns den üblichen Grenzwerteinstieg mit und zitieren ihn, wo es passt, in den Kommentarspalten. Im Kapitel 4 stellen wir dann beide Ansätze nebeneinander. Wir heben hervor, dass in unserem Zugang die bekannten Probleme der Grenzprozesse und Grenzwerte nicht auftreten. Diese Probleme sind so gravierend, dass man in den Curricula auf einen unpräzisen, gefühlsmäßigen „propädeutischen Grenzwertbegriff" ausgewichen ist. Der neue Zugang mit seiner Arithmetik hingegen bietet eine klare mathematische Grundlage. Sie ist, davon sind wir überzeugt, ein tragfähiges Fundament für die folgenden Jahre Analysis in der Schule und darüber hinaus.

Infinitesimalien sind unendlich kleine Zahlen oder Strecken. Die unendlich kleinen Strecken, die man mit der „Unendlichkeitslupe" wie endliche Strecken veranschaulichen kann (und darf, s. Kap. 6 (Elemente 21)), bilden den geometrischen Hintergrund. Wo unendlich kleine Zahlen sind und gerechnet wird, sind auch unendlich große, „infinite" Zahlen. Wie sie praktisch entstehen, kann man gut bei der Einführung des Integrals im Abschnitt 2.2 sehen. Abschnitt 2.3 ist ganz dem erweiterten Rechnen gewidmet. Er versucht einen Weg zu zeigen, wie die neuen Zahlen, die *infinitesimalen* wie die *infiniten* Zahlen, *gemeinsam* mit den Schülerinnen und Schülern, entdeckt und erfunden werden können. Geht es um einen Grenzprozess z.B. von Sekantendreiecken, kommt spontan von manchen Schülerinnen oder Schülern eine Äußerung wie: „Das muss unendlich klein werden". Der Abschnitt 2.3 beginnt hier, mit der Klärung, was unendlich klein bedeuten kann. Kombiniert mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden die infinitesimalen und infiniten Zahlen die *hyperreellen* Zahlen $^*\mathbb{R}$. Wir entwickeln die Arithmetik mit den Schülerinnen und Schülern bewusst und ausdrücklich als *Theorie*.

Kapitel 3 ergänzt methodisch den grundlegenden Unterrichtsgang im Kapitel 2 und bietet Alternativen und Erweiterungen an. Kapitel 4 stellt beide Zugänge, über Grenzprozesse und über Infinitesimalien, einander gegenüber und skizziert knapp Unterschiede und Vorzüge. Wir verweisen auf unser Buch (Elemente 2021), in dem Gegenüberstellung und Vergleich ausführlich Gegenstand der Darstellung sind.

Es ist dieses Buch, das die Hintergründe – mathematisch, historisch und philosophisch – für unsere Handreichung zur Verfügung stellt und auf das wir uns immer wieder beziehen. Daher machen wir gleich Anmerkungen über die für uns dort wesentlichen Inhalte.

Kapitel 5 beginnt mit einem Rückblick auf den Abschnitt 3.4 über die Eulersche Zahl e, der die Bestimmung von e mit einem Hinweis in den Abschnitt 11.3 (Elemente 21) über Exponentialfunktionen begründet. Es folgen Auszüge aus den Lehrplänen der Bundesländer und eine Sammlung von Aufgaben, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Die Abschnitte zeigen, dass unser Ansatz kompatibel ist mit den ministeriellen Vorgaben und wie Lösungen von Abituraufgaben nonstandard aussehen können. Ein sparsames Literaturverzeichnis und einige Literaturempfehlungen schließen die Handreichung ab. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis findet man in dem Buch (Elemente 2021), das Hintergrund für unsere unterrichtliche Arbeit mit der Handreichung ist.

Was man über die Grundlagen in diesem Lehrbuch *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard* lesen kann, deuten wir jetzt an.

Kapitel 2 (Elemente 2021) stellt die Elemente der Analysis, Grenzwert und infinitesimale Zahlen, Ableitung und Integral jeweils standard und nonstandard in zunächst heuristischer Weise vor und gibt einfache Beispiele.

Im Kapitel 3 (Elemente 2021), nach einer Zusammenstellung der Axiome der reellen Zahlen im Abschnitt 3.1, notieren und kommentieren wir in 3.2, auf welchen Axiomen und Prinzipien die praktische mathematische Arbeit mit den hyperreellen Zahlen fußt. Im Abschnitt 2.3 dieser *Handreichung* haben wir die hyperreelle Arithmetik bereits entwickelt, begründet und gegen Ende ihre Axiome angedeutet. Die Situation der hyperreellen Axiomatik ist wie bei den reellen Zahlen, die man in der 9. Klasse einführt und deren Arithmetik man, gewöhnlich wortlos, von den rationalen Zahlen übernimmt.

Im Kapitel 4 der (Elemente 2021) berichten wir über die mengentheoretische Konstruktion der *hyperreellen Zahlen*. Der Abschnitt 3.1 dieser *Handreichung* zeigt im Ansatz in diese Richtung. Die Konstruktion aber ist, wie auch der logische Zugang, für die arithmetische Praxis *nicht* relevant. Wir beginnen das Kapitel 4 (Elemente 21) mit einem Blick in die mengentheoretische Konstruktion der reellen Zahlen, die in der Lehre in der Regel und im Unterricht ganz übergangen wird.

Die reellen Zahlen sind eng mit den Grenzwerten verbunden und spielen daher eine fundamentale Rolle, wenn es um die Problematik der Grenzwerte geht. Diese Problematik wird im Kapitel 5 (Elemente 2021) thematisiert.

Kapitel 6 der (Elemente 2021) ist grundlegend für den Nonstandardansatz und die unterrichtliche Arbeit. Es begründet mathematisch die Anschaulichkeit unseres Ansatzes. Die „Unendlichkeitslupe“, mit der wir unendlich Kleines sichtbar machen, ist kein methodischer Trick, sondern ein legitimes Instrument der Veranschaulichung.

Stetigkeit ist ein weiteres Element, ein Grundbegriff der Arbeit in der Analysis, so grundlegend, dass wir es hier in der *Handreichung* gar nicht angesprochen, sondern in den Hintergrund verschoben haben. Kapitel 7 (Elemente 2021) nimmt die fundamentale Problematik des Stetigkeitsbegriff auf.

Um den historischen Hintergrund geht es im folgenden Kapitel 8 (Elemente 2021). Jeder weiß, dass die Symbole dx, dy auf Leibniz zurückgehen, der die „Infinitesimalrechnung“ entwickelt hat. Der Einstieg, den wir vorschlagen, hat also eine lange und ruhmreiche Tradition. Er unterscheidet sich nur in seiner mathematischen Grundlage, die historisch geometrisch-anschaulich war. Heute ist sie mengentheoretisch und arithmetisch fundiert, ohne die alte geometrische Anschaulichkeit zu verlieren.

In den Kapiteln zuvor stehen Standard und Nonstandard, also Grenzwertbildung und die infinitesimale Methode, einander gegenüber und werden verglichen. In den Kapiteln 9 und 10 (Elemente 2021) machen wir ihre Verbindungen sichtbar.

Kapitel 11 zeigt an weiteren Anwendungen das Gegenüber von Standard und Nonstandard. Der Beweis des Nullstellensatzes zeigt die Differenz von Standard und Nonstandard. Die Substitution bei der Bestimmung von Integralen, die standard Manipulation von Zeichen ist, ist nonstandard arithmetisch begründet. Beim Studium der Exponentialfunktionen ist das Zusammenspiel von Standard und Nonstandard effektiv.

Kapitel 12 schließlich vergleicht beide Ansätze, Standard und Nonstandard, zusammenfassend und blickt auf die „Elemente der Analysis“ und auch auf die *Handreichung* zurück.

Kapitel 2

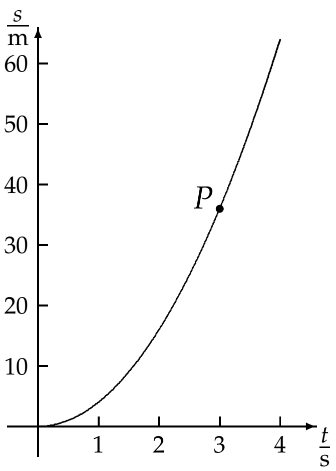
Unterrichtsgang

2.1 Ableitung von Funktionen [*F/H*]

Die im Folgenden vorgestellte Unterrichtsreihe zum Einstieg in die Differentialrechnung kommt ohne die üblichen Grenzwertprozesse aus. An deren Stelle tritt eine fundierte Arithmetik, mit deren Hilfe die aus der Standard-Mathematik bekannten Grenzwerte berechnet werden.

Die gewonnenen Ergebnisse sind also nicht neu, deren Bestimmung liegen aber verschiedene Anschauungen zugrunde: Sind es standard-mathematisch eigentlich abstrakte epsilon-delta-Formalismen, von denen im Unterricht in der Regel nur unklar auf propädeutische Grenzwertformulierungen ausgewichen wird, so werden wir hier mit infinitesimalen Zahlen rechnen. Dieses Rechnen deuten wir dort an, wo und soweit wir es brauchen. Systematisch wird das Rechnen mit allen hyperreellen Zahlen ${}^\star\mathbb{R}$ in der Unterrichtsskizze 2.3 entwickelt.

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
Von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit Einführende Aufgabe: *Bei maximaler Beschleunigung eines „Ferrari 458 Italia“ aus dem Stand lässt sich die zurückgelegte Wegstrecke in Abhängigkeit von der Zeit mit der Funktion $s = 4\,t^2$ beschreiben (s in Metern, t in Sekunden).*	*Unterrichtsabschnitt 1* Hier können auch andere Eingangsbeispiele verwendet werden (Steigung der Normalparabel, andere Beschleunigungsprobleme wie

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
Welche Geschwindigkeit hat der Ferrari drei Sekunden nach dem Start erreicht? 	Freier Fall usw.) und natürlich das bisher favorisierte Eingangsbeispiel eines jeden Lehrers im *Standardanalysis-Unterricht*.
Idee: Die gesuchte Momentangeschwindigkeit lässt sich nicht sofort angeben, aber wegen $v = \frac{s}{t}$ erhält man sicher eine gute Näherung, wenn man die zurückgelegte Strecke einmal nach 3 Sekunden und dann noch einmal eine kurze Zeit später (z.B. nach $3,2$ Sekunden) berechnet und dann die Weg- und Zeitdifferenzen dividiert: $$v \approx \frac{s(3,2) - s(3)}{0,2\mathrm{s}} = 24,8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$ Diese 24,8 m/s stellen die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall von 3 bis 3,2 Sekunden dar; graphisch bedeutet dieser Wert die Steigung der Sekante durch die Punkte P(3/s(3)) und Q(3,2/s(3,2)).	Allen möglichen Einführungsbeispielen gemeinsam ist das Problem, die Steigung eines krummlinigen Graphen in einem Punkt zu bestimmen, also das „Tangentenproblem“: Die Tangente mit ihrer Steigung liefert die Steigung des Graphen in einem bestimmten Punkt und somit – je nach Aufgabenstellung – die momentane Änderungsrate bzw. die Momentangeschwindigkeit. Man bildet wie üblich zunächst Sekanten mit zugehörigen Steigungsdreiecken und

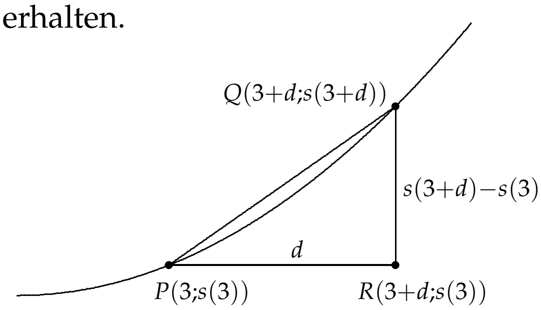
<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Ableitung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>
Eine noch bessere Näherung ergibt sich für eine zeitliche Differenz von $0,1$ Sekunde:

$$v \approx \frac{s(3,1) - s(3)}{0,1\mathrm{s}} = 24,4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

Allgemein kann man für die zeitliche Differenz d die Näherungsgeschwindigkeit mithilfe des Terms

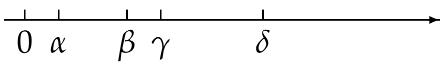
$$v \approx \frac{s(3+d) - s(3)}{d}$$

erhalten.



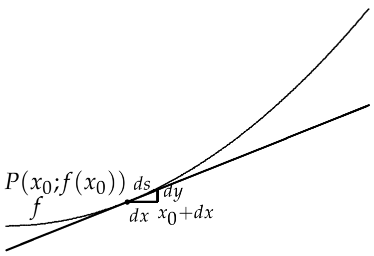
Aber egal, wie klein man d vorgibt, es bleibt ein Näherungswert.
</td><td>
Differenzenquotienten der Form $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Näherung für die gesuchte Tangentensteigung.
</td></tr>
<tr><td>
$\Longrightarrow$ Das Steigungsdreieck müsste **unendlich klein** werden.
Dann würde aus der Sekante mit ihrer Sekantensteigung eine Tangente mit ihrer Tangentensteigung, die dann der Steigung der Parabel in diesem Punkt $P(3\,;\,s(3))$ entspricht.
Aus einer Durchschnittsgeschwindigkeit würde die gesuchte
Momentangeschwindigkeit.
</td><td>
Es sind zumeist die Schülerinnen und Schüler selbst, die die Steigungsdreiecke als „unendlich klein“ fordern, um die Näherung zu verbessern.
</td></tr>
<tr><td>
Exkurs

Diese unendlich kleinen Zahlen kann man sich so vorstellen:
</td><td>
Unterrichtsabschnitt 2
</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
1. <u>Infinitesimale Zahlen</u> sind kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl. 2. Die Summe und die Differenz zweier Infinitesimalzahlen sind wieder infinitesimal. 3. Das Produkt aus einer infinitesimalen und einer reellen Zahl ist infinitesimal. 4. Definition: Zahlen der Form $r + dx$, wobei r reell und dx infinitesimal ist, heißen <u>finite Zahlen</u>. r ist der <u>reelle Teil</u> der finiten Zahl.	Die Infinitesimalzahlen bilden eine Teilmenge der sogenannten hyperreellen Zahlen. Ihre Arithmetik wird in der Unterrichtsskizze 2.3 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt – beginnend mit der Frage „Wie können wir ausdrücken, dass eine Zahl unendlich klein ist?“ Für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler und die benötigten Rechnungen sind die wenigen hier im Exkurs genannten Informationen über die Infinitesimalzahlen ausreichend.
<u>Anschauliche Begründung für 1. und 2.:</u> Außer 0 liegt keine weitere reelle(!) Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!  Auch die Summe und die Differenz zweier solcher Infinitesmalien sowie deren reelle Vielfache bleiben in diesem Ausschnitt und sind damit kleiner als jede positive reelle Zahl, also infinitesimal.	In diesem Unterrichtsgang steht das möglichst schnelle Lösen des Steigungsproblems im Vordergrund. Daher sind hier keine Beweise vorgesehen (s. 2.3). Wer dennoch an dieser Stelle Beweise führen möchte, für den seien sie hier angedeutet:
	Zu 2.: α und β seien infinitesimal. Dann sind beide kleiner als $\frac{r}{2}$ für jedes positive reelle r. Daher ist $\alpha + \beta < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Also ist auch $\alpha + \beta$ infinitesimal.

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
	Zu 3.: Sei α infinitesimal und k reell und positiv. Dann ist $\alpha < \frac{r}{k}$ für jedes positive reelle r. Daher ist $k \cdot \alpha < k \cdot \frac{r}{k} = r$. Also ist auch $r \cdot \alpha$ infinitesimal.
Differentialquotient und Ableitung	*Unterrichtsabschnitt 3*
Mit Hilfe dieser unendlich kleinen Zahlen können wir nun das Steigungsdreieck unendlich klein wählen. Wir nennen die infinitesimale Zeitdifferenz dt und rechnen mit ihr so weiter: $\frac{s(3+dt)-s(3)}{dt} = \frac{4\cdot(3+dt)^2-4\cdot 3^2}{dt}$ $= \frac{4\cdot(9+6\,dt+dt^2)-36}{dt} = \frac{36+24\,dt+4dt^2-36}{dt}$ $= \frac{24\,dt+4\,dt^2}{dt} = 24 + 4\,dt.$	
Mit dt ist auch $4dt$ infinitesimal (vgl. Exkurs). Das bedeutet, dass der Unterschied zwischen dem gefundenen Wert und der gesuchten Momentangeschwindigkeit kleiner ist als jede positive reelle Zahl. Man sagt hierfür auch: Der Wert ist infinitesimal benachbart zu 24. Man darf den Unterschied vernachlässigen und die gesuchte Momentangeschwindigkeit mit 24 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ angeben, da 24 der reelle Teil der finiten Zahl ist, und nur dieser ist in der realen Situation erfassbar.	Hier wird deutlich, dass die Infinitesimalien beim Lösen eines realen Problems als rechnerisches Kalkül verwendet werden. Als Lösung des realen Problems zählt daher dann auch genau der reelle Teil (Standardteil) des finiten Ergebnisses.
Das Vorgehen mit infinitesimalen Änderungen dx zur Berechnung der momentanen Änderungsrate bzw. Momentangeschwindigkeit lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:	In der Gegenüberstellung zur üblichen Vorgehensweise in der *Standard-Mathematik* zeigen sich die Vorzüge des infinite-

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Ableitung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>



Das Steigungsdreieck wird unendlich klein („charakteristisches Dreieck“), aber es bleibt erhalten! Wir betrachten es quasi mit einer „Unendlichkeitslupe“ (s. Elemente 2021, 6.2).

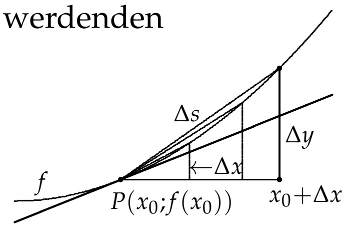
Die Steigung bleibt – mit der Hypotenuse im unendlich kleinen Sekantendreieck – sichtbar.

Die Hypotenuse ist Teil der Tangente *und* der Kurve. Da das Dreieck erhalten bleibt, kann deren Steigung mit Hilfe der infinitesimalen Zahlen exakt berechnet werden.
Es ergibt sich eine finite Zahl, deren reeller Anteil (Standardteil) die gesuchte momentane Änderungsrate liefert.

</td><td>

simalen Zugangs in deren besonderer Anschaulichkeit und der zugrunde liegenden fundierten Arithmetik.

Im *Standard-Zugang* nähern sich die Hypotenusen von immer kleiner werdenden



Sekantendreiecken in einem unendlichen Prozess der Kurve und verschwinden schließlich – nicht mehr sichtbar und daher oft schwer nachvollziehbar – im Berührpunkt der Tangente. Die Anschauung geht verloren. Beim Grenzwertprozess „streben“ Δx (und Δy) „gegen 0“ und somit „strebt“ der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen die Steigung der Tangente.
Dass der am Ende des Prozesses ermittelte Grenzwert die gesuchte momentane Änderungsrate angibt, ist für die Schülerinnen und Schüler oft auch deshalb schwer nachvollziehbar, weil der Prozess

</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
	den Wert nicht erreicht.
Das vorgestellte Verfahren zur Berechnung der momentanen Änderungsrate lässt sich auf viele weitere Beispiele anwenden und verallgemeinern für eine beliebige Stelle x:	
Aufgabe: *Bestimme die Steigung (momentane Änderungsrate) an einer beliebigen Stelle des Graphen von* $f(x) = x^2$.	Das Beispiel dient Übungszwecken. Zugleich soll es durch die hier vorgenommene Gegenüberstellung verdeutlichen, dass sich bei aller Unterschiedlichkeit im Denken die Rechnungen im *Standard-Zugang* und im *Nichtstandard-Zugang* doch sehr ähneln.
Bestimmung der Tangentensteigung im charakteristischen Dreieck:	Bekanntes Vorgehen aus der *Standardanalysis*: Bestimmung des Differenzenquotienten:
$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx} \\ &= \frac{x^2+2x\,dx+(dx)^2-x^2}{dx} \\ &= \frac{2x\,dx+(dx)^2}{dx} \\ &= 2x+dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2+2x\,\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x+\Delta x \end{aligned}$
Bestimmung der Steigung (der momentanen Änderungsrate) mit infinitesimalem dx: $2x + dx \simeq 2x$, wobei das Zeichen $\simeq$ „infinitesimal benachbart zu“ bedeuten soll, d.h. „gleich bis auf einen unendlich kleinen Unterschied“.	Bildung des Grenzwertes: $\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
Mit dem bisher Gesagten ergeben sich folgende Definitionen: • Für infinitesimales $dx \neq 0$ heißt der Bruch $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ ein Differentialquotient von f. • Wenn es zu einer Funktion f und einer Stelle x eine reelle Zahl a gibt, so dass für jedes infinitesimale $dx \neq 0$ immer gilt: $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq a$, so heißt a die Ableitung von f an der Stelle x, in Zeichen: $f'(x) = a$. Wir können auch sagen: Die Ableitung von f an der Stelle x ist der reelle Teil (Standardteil) des Differentialquotienten an der Stelle x. • Die Funktion f', die jedem x die Ableitung von f zuordnet, also $f' : x \longmapsto f'(x)$, heißt Ableitungsfunktion von f, oder – wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind – kurz: Ableitung von f.	Hier wird der Unterschied deutlich erkennbar: In der *Standardanalysis* ist der Differentialquotient (oder synonym die Ableitung) der Grenzwert des Differenzenquotienten. In der *Nichtstandard-Analysis* dagegen kommt der Differentialquotient eigenständig ins Spiel. Dessen reeller Teil (Standardteil) ist dann die Ableitung.
Ableitungsregeln Je nach Niveau (GK oder LK) werden unterschiedliche Funktionsklassen behandelt, sodass auch entsprechende Ableitungsregeln bewiesen und angewandt werden.	*Unterrichtsabschnitt 4*
Beweise der Ableitungsregeln: Vorbemerkung: Im Folgenden wird verwendet: $df = f(x+dx) - f(x)$ und	Bei diesen Beweisen sei nochmals darauf hingewiesen, dass sie sich rein formal nicht von denjenigen in der *Standard-Analy-*

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Ableitung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>

$dg = g(x+dx) - g(x)$ sowie $f'(x) \simeq \frac{df}{dx}$ und $g'(x) \simeq \frac{dg}{dx}$.

Außerdem wird die Differenzierbarkeit der Funktionen f und g vorausgesetzt.

a) Faktorregel (Ableitung von $(c \cdot f)(x)$)

$\frac{(c\cdot f)(x+dx)-(c\cdot f)(x)}{dx} = \frac{c\cdot f(x+dx)-c\cdot f(x)}{dx}$
$= c \cdot \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq c \cdot f'(x)$,

$$\text{also } (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \; .$$

b) Summenregel (Ableitung von $(f+g)(x)$)

$\frac{(f+g)(x+dx)-(f+g)(x)}{dx}$
$= \frac{f(x+dx)+g(x+dx)-f(x)-g(x)}{dx}$
$= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}$
$\simeq f'(x) + g'(x)$,

$$\text{also } (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \; .$$

c) Potenzregel (Ableitung von $f(x) = x^n$)

Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt

$\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} =$
$= \frac{x^n + n\cdot x^{n-1}dx + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot (dx)^2 + \cdots + (dx)^n - x^n}{dx}$
$= n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot dx + \cdots + (dx)^{n-1}$
$\simeq n \cdot x^{n-1}$,

$$\text{also } (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \; .$$

</td><td>

sis unterscheiden, aber hier werden die Differentialquotienten <u>berechnet</u>, ohne propädeutische Grenzwertprozesse zu betrachten.

</td></tr>
</table>

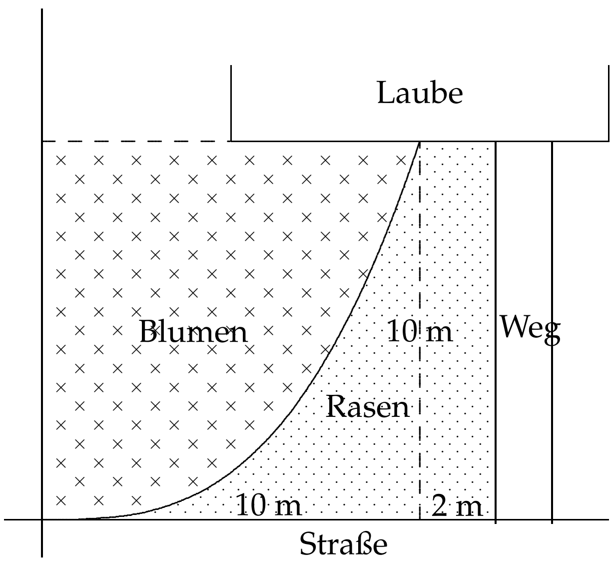
Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
d) Produktregel (Ableitung von $(f \cdot g)(x)$) $\frac{(f\cdot g)(x+dx)-(f\cdot g)(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)\cdot g(x+dx)-f(x)\cdot g(x)}{dx}$ $= \frac{(f(x)+df)\cdot(g(x)+dg)-f(x)\cdot g(x)}{dx}$ $= \frac{f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot dg+df\cdot g(x)+df\cdot dg-f(x)\cdot g(x)}{dx}$ $= f(x)\cdot\frac{dg}{dx}+g(x)\cdot\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}\cdot df$ $\simeq f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x),$ da der letzte Summand $g'(x)\cdot df$ infinitesimal ist. Also $(f\cdot g)'(x) = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)\ .$	Der Beweis der Produktregel kommt hier ohne die trickreiche(?) „Nulladdition“ aus, die in der *Standardanalysis* üblicherweise verwendet wird. Hier kommt vielmehr die in der *Nichtstandard-Analysis* besonders anschauliche Deutung der Stetigkeit zum Tragen, die zu einer wesentlichen Vereinfachung der Beweisführung führt.
e) Kettenregel (Ableitung von $(f(g(x)))$ $\frac{f(g(x+dx)-f(g(x))}{dx} = \frac{f(g(x)+dg)-f(g(x))}{dx}$ $= \frac{f(g(x)+dg)-f(g(x))}{dx}\cdot\frac{dg}{dg}$ $= \frac{f(g(x)+dg)-f(g(x))}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$ $\simeq f'(g(x))\cdot g'(x),$ also $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$	Als einzigen mathematischen Kniff benötigt man beim *Nicht-Standard-Unterrichtsgang* an dieser Stelle die Multiplikation mit $1 = \frac{dg}{dg}$, was in der *Standard-Analysis* gar nicht möglich ist.
f) Quotientenregel (Ableitung von $(\frac{f}{g})(x)$): Sie ergibt sich aus der Produktregel, der Potenzregel und der Kettenregel. Wegen $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot(g(x))^{-1}$ gilt:	Natürlich lässt sich die Quotientenregel auch „zu Fuß“, ausgehend vom zugehörigen Differentialquotienten, beweisen.

Unterrichtsgang Ableitung	*Kommentar*
$(\frac{f}{g})'(x)$ $= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot ((g(x))^{-1})'$ $=f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x)$ $= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.	
Funktionsuntersuchungen, Anwendungen der Differentialrechnung	*Folgende Unterrichtsabschnitte*
Wie gewohnt.	Im weiteren Verlauf der Differentialrechnung unterscheidet sich der hier vorgestellte *Nicht-Standard-Unterricht* nicht vom *Standard-Verlauf*.

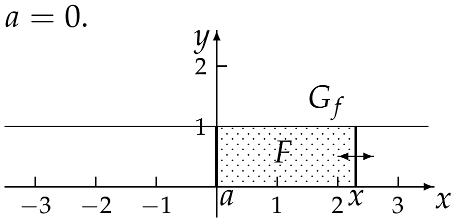
2.2 Einstieg in die Integralrechnung [*Ba*]

Der folgende Unterrichtsgang zur Einführung des Integrals ist elementar aufgebaut und geht, mit den bekannten Flächeninhalten geradlinig begrenzter Flächen im Koordinatensystem beginnend, Schritt für Schritt voran. Seine Intention ist es, in dieser Weise den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu erreichen. Mit dem Hauptsatz endet der Unterrichtsgang und der Analysisunterricht geht wie gewohnt weiter.

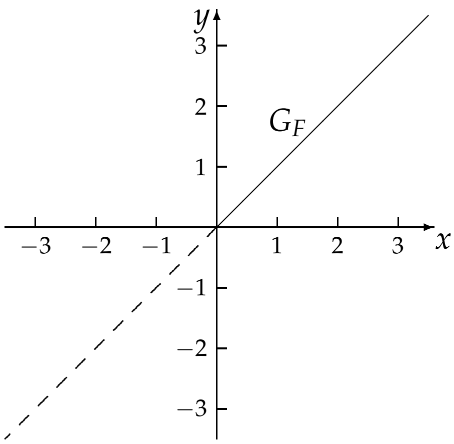
Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
Einführende Aufgabe	*Unterrichtsabschnitt 1*
Gerhard und Isolde F. besitzen am Stadtrand einen Schrebergarten. Sie möchten die Fläche zwischen der Eingangsseite des Grundstücks und der Laube neu gestalten, indem sie für den einen Teil ein Blumenbeet vorsehen und für den anderen eine Rasenflä-	Jede Lehrerin und jeder Lehrer hat sicherlich ein eigenes Beispiel mit „Anwendungsbezug“, das eingesetzt werden kann. Es ist aber durchaus erlaubt,

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
che. Als Mathematiklehrerin hat Isolde vorgeschlagen, die Trennlinie solle eine Kurve sein, die dem Graphen der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ entspricht (siehe Skizze). Um abschätzen zu können, wieviel m^2 *Rollrasen sie kaufen müssen, müssen sie den Flächeninhalt der Rasenfläche herausfinden.* Hinweis: Die Maße sind der Skizze zu entnehmen, das Koordinatensystem wähle man geeignet, die Länge 10 m sei eine Einheit.	das Flächeninhaltsproblem auch innermathematisch zu motivieren.
Skizze: 	Die Aufgabe und die mit ihr verbundene Problematik wird *genauso behandelt wie im Standardunterricht*. Im vierten Unterrichtsabschnitt (S. 25) werden unendlich große hyperreelle Zahlen auftauchen (vgl. 2.3).
Die Schwierigkeit besteht darin, dass der eine Rand der Rasenfläche eine Kurve ist. Es ist „neu" zu denken, weshalb die Berechnung von Flächeninhalten zunächst an einfachen Beispielen in Erinnerung gerufen werden muss.	Möglicherweise erinnern sich Schülerinnen und Schüler daran, wie man die Formel für den Kreisinhalt herausgefunden hat.
Inhalte von geradlinig begrenzten Flächen	*Unterrichtsabschnitt 2*
Wäre der Rand gerade, wäre die Größe der Rasenfläche leicht zu berechnen, gleich, wie lang diese Kante wäre und wo sie verliefe.	Für das folgende ist es zweckmäßig, die Graphiken mit gleichen Maß-

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Integralrechnung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Es soll zunächst herausgefunden werden, nach welchen Regeln sich der Inhalt einer Fläche verändert, wenn man ihren Rand verschiebt und damit ihre Größe ändert.</td><td>stäben untereinander anzuordnen. Das erleichtert den Blick für die Zusammenhänge. Die Wertetabelle sollte dazwischen angeordnet werden.</td></tr>
<tr><td>Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 1$ und der x-Achse soll bestimmt werden. Die Länge einer Seite wird dabei variiert. Dafür soll die obere Grenze x variabel sein, die untere Grenze sei fest bei $a = 0$.

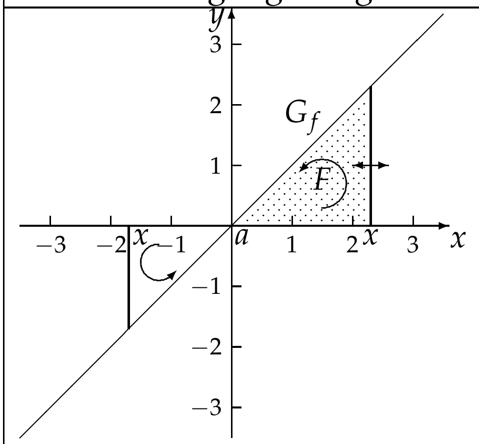


<table>
<tr><th>x</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>−1</th><th>−2</th><th>−3</th></tr>
<tr><td>$F(x)$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>−1</td><td>−2</td><td>−3</td></tr>
</table>

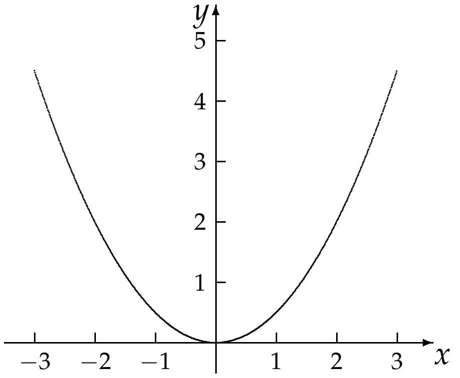


Auf entsprechende Weise erhält man aus der Funktion $f(x) = x$ als Flächeninhaltsfunktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.</td><td>Der Kürze halber beschränken wir uns auf positive x und positive Flächeninhalte. Hier an diese elementare Stelle aber passt gut eine Behandlung der Vorzeichenregel, auf die die negativen Werte in der Wertetabelle und Orientierungspfeile in Flächen hinweisen.</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*



x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



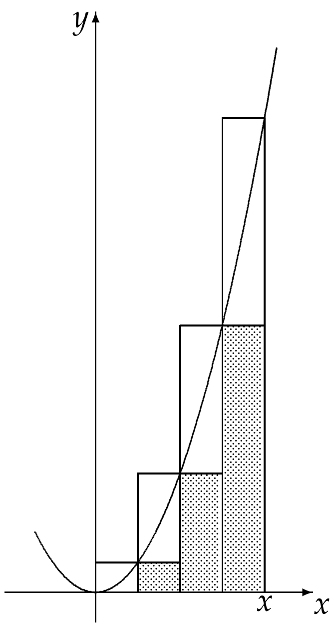
Flächeninhalt unter einer Parabel	*Unterrichtsabschnitt 3*
Nun soll eine Funktion für den Flächeninhalt zwischen der Parabel und der x-Achse ermittelt werden. Weil aber die Flächen einen krummen Rand haben, sind neue Überlegungen notwendig.	Hier besteht die Möglichkeit, verschiedene Verfahren sowie mögliche Vor- und Nachteile zu diskutieren: Annäherung des Flächeninhalts mit Rechtecken oder Trapezen, Einschachtelung „von oben“ oder „von unten“.
Zur Vereinfachung wird vom Faktor $\frac{1}{2}$ abgesehen und zur Parabel mit der Funktion $f(x) = x^2$ übergegangen.	Über das weitere Vorgehen wäre nun mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren.

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Integralrechnung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>

Eine Annäherung an den gesuchten Flächeninhalt kann mit Rechtecken auf zwei Arten erfolgen.

Im ersten Fall überdecken die Rechtecke die Parabel (*Obersumme*), ihr Flächeninhalt ist größer als der gesuchte.

Im anderen Fall liegen die Rechtecke vollständig unterhalb der Parabel (*Untersumme*), ihr Flächeninhalt ist mit Sicherheit zu klein. Wegen der Krümmung der Parabel kann der Flächeninhalt auch nicht gleich dem arithmetischen Mittel der Rechtecksummen sein.



</td><td>

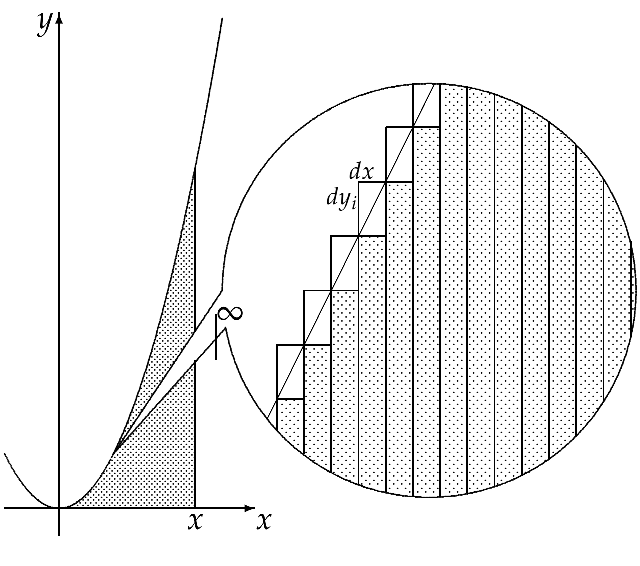
Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Fläche mit Trapezen auszufüllen, was aber auf denselben Term für den Flächeninhalt führt.

Hier wird die Berechnung bis zur variablen oberen Grenze x gezeigt. Je nach Unterrichtssituation kann auch die obere Grenze fest, zum Beispiel bei 1, gewählt werden, um zunächst die Struktur des entstehenden Terms verständlicher zu machen und Zahlenwerte ausrechnen zu können. Aus dem gleichen Grund sollte die Strecke zwischen unterer und oberer Grenze zunächst in vier gleich große Intervalle zerlegt werden.

Diese Anzahl sollte man dann schrittweise auf 8, 100 usw. erhöhen, damit die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie sich der Term dabei verändert. Am Ende wird eine infinite Anzahl N eingesetzt.

</td></tr>
</table>

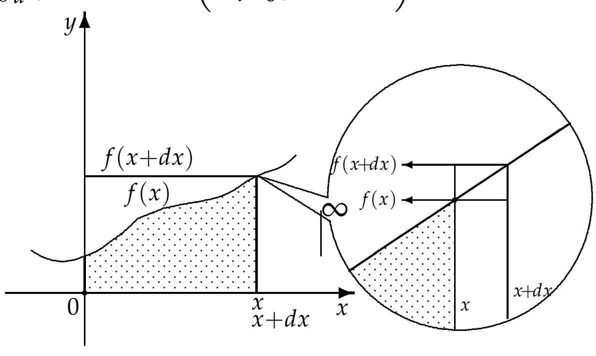
Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
Der Zeichnung kann man entnehmen, dass sich *Untersumme* und *Obersumme* nur um einen Rechtecksinhalt unterscheiden, denn man kann die drei schattierten Rechtecke der *Untersumme* nach links verschieben und dann mit einem vierten Rechteck ergänzen.	
Berechnung der Rechtecksummen mit der Einteilung des Intervalls $[0; x]$ in vier Teile (Brüche zweckmäßigerweise nicht kürzen):	Sowohl für die Termumformungen als auch für den Umgang mit der Summenschreibweise sollte genügend Zeit eingeplant werden.
Untersumme: $F_{u_4} = \frac{1}{4}x \cdot (\frac{1}{4}x)^2 + \frac{1}{4}x \cdot (\frac{2}{4}x)^2 + \frac{1}{4}x \cdot (\frac{3}{4}x)^2$ $= \ldots$ $= \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{3} i^2$ Obersumme: $F_{o_4} = \ldots = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{4} i^2$	Die Summenschreibweise und wie sie auszusprechen ist, ist in der Regel noch nicht bekannt. Eine der beiden Rechnungen ist eine geeignete Hausaufgabe.
Erhöhung der Anzahl an Rechtecken und Berechnung des Flächeninhalts	*Unterrichtsabschnitt 4*
Die Frage, was getan werden kann, um den Fehler in der Berechnung zu verkleinern, führt auf Zwischenschritte mit feinerer Unterteilung des Intervalls $[0; x]$, z.B. mit $n = 8$ oder $n = 100$.	Die Erhöhung der Anzahl der Rechtecke dient der Übung zum Verständnis des Rechenterms. Wie sich eine feinere Unterteilung auf die Terme für Unter- und Obersumme auswirkt, finden Schülerinnen und Schüler nach kurzer Überlegung selbst heraus.

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
Danach tritt die Frage auf, ob man den Fehler zum Verschwinden bringen kann.	Hier besteht **erstmals (!) ein Unterschied zum Standardunterricht**. Der Vorteil ist, dass die Schülerinnen und Schüler das machen dürfen, was sie intuitiv fordern: unendlich viele unendlich schmale Rechtecke.
„Die Intervalle müssten unendlich schmal sein. Dann hat man aber unendlich viele Intervalle.“	Derartige Vorschläge kommen in der Regel von den Schülerinnen und Schülern.
Um dies sichtbar zu machen, ist der Graph mit einem infiniten Faktor zu vergrößern.	Die Lehrerin oder der Lehrer hat hier die Möglichkeit, an die Fachbegriffe zu erinnern: Die Breite der Rechtecke ist *infinitesimal*, ihre Anzahl *infinit*.
	Die Unendlichkeitslupe $\vert^{\infty}$ zeigt an, dass mit einem infiniten Faktor vergrößert wird. **Diese mathematisch legitimierte** (Kap. 6 (Elemente 2021)) **Möglichkeit bietet der Standardunterricht nicht.** Mit dieser Möglichkeit der infiniten Vergrößerung kommt man nun schnell zum Hauptsatz der Analysis: Es wird die (infinite) Untersumme berechnet und anschließend nachgewiesen, dass die

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
	verbleibende Restfläche infinitesimal ist. Mögliche Alternativen werden in der Kommentarspalte angedeutet.
Die Quadratfunktion und somit auch die Rechtecksummen für die Unterteilung des Intervalls in infinit viele Rechtecke (Anzahl N) mit infinitesimaler Breite sind nun hyperreell zu denken:	
Untersumme: $F_{u_\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + (\mathrm{N}-1)^2)$ $= \frac{1}{\mathrm{N}^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} i^2$	Für die Obersumme erhält man $F_{o_\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + \mathrm{N}^2)$ $= \frac{1}{\mathrm{N}^3} \cdot x^3 \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} i^2$
Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gibt es eine Schreibweise als Produkt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$ Dieser Zusammenhang gilt auch im Unendlichen.	Auf einen Beweis dieser Formel (z.B. mittels vollständiger Induktion) sollte hier verzichtet werden. Denkbar sind aber Überprüfungen mit $n = 2$ bis $n = 5$.
Umwandlung der Untersumme in Produktschreibweise und Umformungen: $F_{u_\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}^3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\mathrm{N}-1) \cdot \mathrm{N} \cdot (2\mathrm{N}-1)$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{2\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}$ $= \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot (1 - \frac{1}{\mathrm{N}}) \cdot 1 \cdot (2 - \frac{1}{\mathrm{N}})$ Hiervon ist der reelle Teil (Standardteil) zu bilden, den wir ab jetzt mit ***rt*** bezeichnen. $\mathrm{rt}(F_{u_\mathrm{N}}) = \mathrm{rt}\left(\frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot (1 - \frac{1}{\mathrm{N}}) \cdot 1 \cdot (2 - \frac{1}{\mathrm{N}})\right)$ $= \frac{1}{3} \cdot x^3$ Dies ist eine Funktion dritten Grades, allerdings ist noch zu klären, wie groß die Fläche unter der Parabel ist, die von den Rechtecken nicht abgedeckt wird.	Achtung! Für die Untersumme ist die Formel umzudenken. Auch für die Obersumme erhält man als reellen Teil (Standardteil) $\mathrm{rt}(F_{o_\mathrm{N}}) = \frac{1}{3} \cdot x^3$. Damit ist die Flächeninhaltsfunktion **errechnet**.
Der unvergrößerten Zeichnung der Parabel (S. 23) wurde entnommen, dass sich Unter- und Obersumme nach der Verschiebung nur	Auch die „dreieckigen“ Differenzflächen zwischen Rechtecken und

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Integralrechnung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>um ein Rechteck unterscheiden. (Es ist genauso groß wie die Summe aller einzelnen Differenzrechtecke.)
Sein Flächeninhalt beträgt $A_{\text{Diff-R}} = f(x) \cdot dx$.
Dieses Produkt ist infinitesimal, denn dx ist infinitesimal und $f(x)$ reell.
Damit gibt der reelle Standardteil der Obersumme (bzw. der Untersumme) den reellen Flächeninhalt richtig wieder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.</td><td>Kurve sind, da sie kleiner sind, infinitesimal.</td></tr>
<tr><td>Zusammenfassung aller Flächeninhaltsfunktionen, Hauptsatz der Analysis

<table>
<tr><th>Randfunktion f</th><th>Flächeninhaltsfunktion F</th></tr>
<tr><td>$f(x) = 1$</td><td>$F(x) = x$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = x$</td><td>$F(x) = \frac{1}{2}x^2$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>$F(x) = \frac{1}{3}x^3$</td></tr>
</table>
Es scheint so zu sein, dass die Randfunktion gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist.
Oder umgekehrt: Man findet zu einer Funktion f die Flächeninhaltsfunktion F, indem man das Ableiten der Funktion f „rückwärts vornimmt“.
Gelten diese beiden Zusammenhänge immer? Falls ja, dann sind sie zu beweisen.</td><td>Unterrichtsabschnitt 5</td></tr>
<tr><td>Es gibt unendlich viele solcher Funktionen, von denen f als Ableitung „abstammen“ kann, denn zum Beispiel ist die Funktion mit $f(x) = x^2$ auch die Ableitung von $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 53$. Alle solche Stammfunktionen können sich nur in einem konstanten Summanden unterscheiden, der beim Ableiten wegfällt. Welche soll man nehmen?
Die obere Grenze soll von nun ab nicht mehr x, sondern b genannt werden.
Mit der errechneten Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ kann man den Flächeninhalt unter der Parabel z.B. zwischen $a = 0$ und $b = 4$ direkt angeben. Man erhält $F(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 = \frac{64}{3}$ Flächeneinheiten (FE).</td><td>Der Begriff „Stammfunktion“ kann hier anschaulich eingeführt werden.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Integralrechnung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>
Wenn die untere Grenze nicht bei null liegt, sondern z.B. bei $a = 2$, dann berechnet man die Differenz zweier Flächeninhalte, nämlich $F(4) - F(2) = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$ (FE).
Hier wird erkennbar, dass jede Stammfunktion geeignet ist, den Flächeninhalt zu berechnen, denn beim Bilden der Differenz fällt ein konstanter Summand wieder heraus.
Der Flächeninhalt wird Integral genannt, weil man unendlich viele infinitesimale Rechteckinhalte zusammenfasst (integriert).
Historisch hat sich eine bestimmte Schreibweise für Integrale entwickelt. Man schreibt z.B. für die Obersumme
$$\int_a^b x^2\,dx = \mathrm{rt}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x^2\,dx\right)$$
und spricht (für die linke Seite):
„Integral von $f(x) = x^2$ zwischen a und b.“
</td><td>Auch andere Sprechweisen sind durchaus üblich.</td></tr>
<tr><td>
Hauptsatz der Analysis
1. Die Randfunktion f ist gleich der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion F, die den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse beschreibt:
$f(x) = F'(x)$.
2. Der Inhalt der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen, der x-Achse, der unteren Grenze a und der oberen Grenze b ist gleich der Differenz der Funktionswerte an den Stellen b und a einer Stammfunktion von f:
$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{rt}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\,dx\right) = F(b) - F(a)$.


</td><td>Skizze zum Hauptsatz, Teil 1 (s. auch S. 91 !)</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
Beweis Teil 1 (s. auch S. 91 !) An irgendeiner Stelle x des Intervalls besitze der Flächeninhalt den Wert $F(x)$. Verschiebt man nun die obere Grenze um ein infinitesimales dx, so ändert sich der Flächeninhalt zu $F(x+dx)$. Die Veränderung beträgt also $F(x+dx) - F(x)$.	Der Beweis des Hauptsatzes ist in der Nichtstandard-Analysis einfach und kurz.
Mit infinitesimalem dx ist, genau wie der tatsächliche Flächenzuwachs, auch der Inhalt eines hinzuzufügenden Näherungsrechtecks infinitesimal: $f(x) \cdot dx$. Der verbleibende Unterschied zur tatsächlichen Fläche ist maximal ein Rechteck, von dem beide Seitenlängen dx und dy infinitesimal sind (dy kann positiv oder negativ sein).	Variante mit Einschachtelung des Zuwachses: Es gilt (z.B. für monoton wachsende Funktionen) $f(x) \cdot dx \leq F(x+dx) - F(x) \leq f(x+dx) \cdot dx$. Division durch dx ergibt $f(x) \leq \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \leq f(x+dx)$, wovon der reelle Teil (Standardteil) zu bilden ist. Weil dieser für $f(x)$ und $f(x+dx)$ übereinstimmt, folgt die Gleichheit. In der Mitte steht der reelle Teil (Standardteil) des Differentialquotienten der Flächeninhaltsfunktion, also ihre Ableitung.
Also gilt $F(x+dx) - F(x) \simeq f(x) \cdot dx + dy \cdot dx = (f(x) + dy) \cdot dx$. Division durch dx ergibt $\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \simeq f(x) + dy$. Mit dem Übergang zum reellen Teil (Standardteil) erhält man $$F'(x) = f(x).$$ **Beweis Teil 2:** Sei F_a die spezielle Stammfunktion von f, die den Flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$ richtig beschreibt, dass also gilt $F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.	

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
Zur Beschreibung ist aber jede andere Stammfunktion F genauso geeignet, denn sie kann sich von F_a nur um eine konstante Funktion C unterscheiden, da nur konstante Funktionen beim Ableiten wegfallen: $C'(x) = 0$. Wegen $C(b) - C(a) = 0$ ergibt sich dann $F(b) - F(a) = (F_a + C)(b) - (F_a + C)(a)$ $= F_a(b) + C(b) - (F_a(a) + C(a))$ $= F_a(b) + C(b) - F_a(a) - C(a) = F_a(b) - F_a(a)$. Also gilt $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.	
Lösung des Eingangsproblems	*Unterrichtsabschluss*
Mit Hilfe eines Integrals kann also nun der Inhalt der Fläche mit gekrümmtem Rand berechnet werden. Die gesamte Fläche besteht aus einem „Dreieck“, dessen eine Seite vom Graphen von $f(x) = x^3$ gebildet wird, und einem Rechteck. Der Ursprung des Koordinatensystems sei in der Grundstücksecke an der Straße, die x-Achse die Grundstücksgrenze zur Straße. Mit der Vorgabe 10 m für 1 Einheit geht der Graph offenbar durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$. Es ist also das Integral $\int_0^1 x^3\,dx$ zu berechnen. Man erhält damit für die dreieckige Fläche den Inhalt	

Unterrichtsgang Integralrechnung	*Kommentar*
$A_1 = \int_0^1 x^3\,dx = [\frac{1}{4}x^4]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{4}$ Flächeneinheiten. Eine Flächeneinheit entspricht $10\text{m} \cdot 10\text{m} = 100\text{m}^2$. Damit beträgt der Anteil der Fläche mit dem krummen Rand $\frac{1}{4} \cdot 100\text{m}^2 = 25\text{m}^2$. Die rechteckige Fläche ist $2\text{m} \cdot 10\text{m} = 20\text{m}^2$ groß. Somit beträgt die gesamte mit Rasen zu versehende Fläche $25\text{m}^2 + 20\text{m}^2 = 45\text{m}^2$. Es sind also mindestens 45m^2 Rollrasen zu kaufen.	

Es folgt nun der übliche Unterricht zur Integralrechnung.

2.3 Arithmetik: Rechnen mit hyperreellen Zahlen

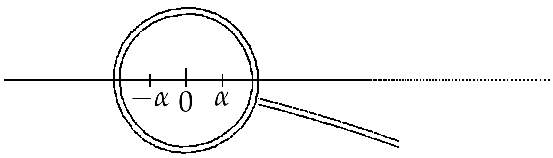
[*Be*]

Der folgende Unterrichtsgang beschreibt in knappen Formulierungen Schritt für Schritt die hyperreelle Arithmetik, soweit sie im Einstieg in die Analysis gebraucht wird. In dieser systematischen Weise wird man die Arithmetik kaum unterrichten. Eher wird man dort, wo der Bedarf entsteht, die arithmetischen Regeln erarbeiten und vielleicht auch lokal arithmetische Exkurse einbauen. Für beide Vorgehensweisen kann man auf den folgenden systematischen Unterrichtsgang zurückgreifen.

Der Weg beginnt bei den reellen Zahlen. Wir sehen, wie elementar der Aufbau der Theorie der hyperreellen Arithmetik ist – ganz im Gegensatz zur großen, ungelösten Problematik der Theorie der reellen Zahlen im Unterricht. Für Schülerinnen und Schüler braucht es in manchen Phasen dennoch manches Nachdenken, manches schriftliche oder gedankliche Experiment und die Diskussion. Zentral ist: Die hyperreelle Arithmetik kann und soll vollständig – ausgehend von gemeinsamen, expliziten *Vereinbarungen* – mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden. Besser: Sie entwickeln die *Theorie* selbst – mit der Assistenz der Lehrenden. Auch die Bezeichnungen für die neuen Zahlen sollten gemeinsam festgelegt werden, um den

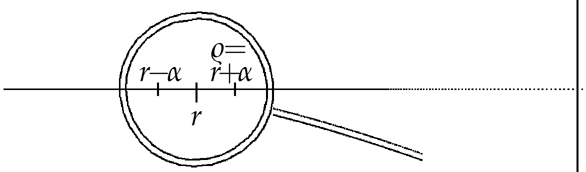
Vorgang der *Konvention* deutlich zu machen. Im folgenden Unterrichtsgang machen wir bewährte Bezeichnungs*vorschläge* für die Typen von Zahlen, die wir am Ende begründen und in einer Tabelle zusammenfassen.

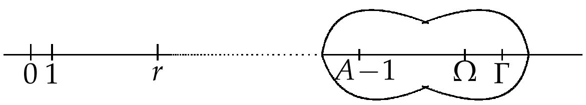
Beweise werden zum gemeinsamen *Anliegen*, da sie die *eigenen* arithmetischen Hypothesen in der *eigenen Theorie* begründen. Die Beweise im Unterrichtsgang enthalten den Kern der Gedankenführung in einfacher Sprache und Symbolik. Sie werden sich im Unterricht aber aus der Diskussion heraus anders, lebendiger und vielfältiger, gestalten. In einem Anhang geben wir ein Beispiel eines hypothetischen Unterrichtsgesprächs zum allerersten Beweis. Der Aufbau der hyperreellen Arithmetik ist ein interessantes Arbeitsfeld, für Lernende wie Lehrende.

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
Einstieg: Was heißt „unendlich klein"?	*Unterrichtsabschnitt 1*
Frage: Wie können wir jemandem erklären, was „unendlich klein" bedeuten soll?	Die Idee „unendlich klein" (>0) entsteht z.B. bei der Beobachtung der immer kleiner werdenden Sekantendreiecke in 2.1.
Beispiele möglicher Äußerungen: Unendlich klein ist kleiner als alles. Unendlich klein ist eine Strecke, die man nicht mehr sehen kann. Auch mit keiner noch so starken Lupe. Aber vorstellen kann man sie sich, so, als wenn man eine *Unendlichkeitslupe* hätte. 	*Anlässe für Diskussionen.* Es genügt, zuerst nur über *positive* Zahlen zu sprechen, auch wenn sie unendlich klein sind. In (Elemente 2021, 6.2) wird die Idee der infiniten Vergrößerung mathematisch legitimiert.
„Unendlich klein" heißt „kleiner als jede Zahl". Ist α eine unendlich kleine Zahl, dann liegt sie unendlich nah bei 0.	Es genügt, über *positive* unendlich kleine Zahlen zu sprechen (s.o.).

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
„Unendlich klein“ ist nicht null, aber „kleiner als jede noch so kleine Zahl“.	
Vereinbarung: Unendlich kleine positive Zahlen α sind größer als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl r. Statt „unendlich klein“ sagen wir auch „infinitesimal“. Wir schreiben $\alpha \simeq 0$.	*Definition*: α heißt positiv infinitesimal, wenn gilt: $\alpha > 0$ und $\alpha < r$ für alle $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Wir bezeichnen infinitesimale Zahlen mit α, β, γ und oft auch mit dx, dy, dz usw.	Wir machen durchgehend nur Bezeichnungs*vorschläge*.
Unendlich kleine Zahlen können auch negativ sein.	s. Abbildung
Vereinbarung: Der Betrag $\vert\alpha\vert$ unendlich kleiner Zahlen α ist kleiner als jede positive reelle Zahl r. Wir schreiben $\alpha \simeq 0$.	*Definition*: α heißt infinitesimal, wenn gilt: $\vert\alpha\vert < r$ für alle $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Ist 0 eine infinitesimale Zahl? „0 ist die ‚infinitesimalste‘ Zahl.“	Diskussion! „0 ist kleiner als alle unendlich kleinen positiven Zahlen.“
Vereinbarung: 0 ist infinitesimal.	
Frage: Gibt es unendlich kleine Zahlen? *Antwort*: Wir sind mutig und *erfinden* sie!	Es beginnt eine Theorie, die gemeinsam mit den SuS entwickelt wird.
Rechnen mit infinitesimalen Zahlen	*Unterrichtsabschnitt 2*
Frage: Wie rechnen wir mit unendlich kleinen Zahlen? *Vereinbarung*: Wie mit gewöhnlichen Zahlen.	

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
Wir addieren, multiplizieren, subtrahieren, dividieren sie miteinander und mit reellen Zahlen und ordnen die Terme. Beispiele von Termen und Ausdrücken: $\alpha + \alpha$, $3 \cdot \alpha$, $r + \alpha$, $n \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \beta$, $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$, $\frac{dy}{dx}$, $\alpha - \alpha = 0$, $\frac{\beta}{\beta} = 1$, $\alpha < \alpha + \beta$.	
Frage: Wie groß ist $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$? Ist „infinitesimal + infinitesimal“ auch „infinitesimal“? *Antwort*: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$ ist infinitesimal. *Beweis*: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{2}$, denn $\frac{r}{2}$ ist eine reelle Zahl. Also ist $2 \cdot \alpha < r$ für jedes r.	Anschaulich ist das in 2.1 begründet (durch die infinite Vergrößerung der Verhältnisse auf der Zahlengeraden.)
Aussage: Sind α und β infinitesimal, dann ist $\alpha + \beta$ infinitesimal. *Beweis*: Ist z.B. $\alpha < \beta$, dann ist $\alpha + \beta < 2 \cdot \beta$, also $\alpha + \beta$ infinitesimal.	Hausaufgabe? Übung? Beweis aus der Praxis s. Anhang.
Aussage: $n \cdot \alpha$ ist infinitesimal für jedes natürliche n. *Beweis*: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{n}$, denn $\frac{r}{n}$ ist eine reelle Zahl. Also ist $n \cdot \alpha < r$ für jedes r.	
Aussage: $s \cdot \alpha$ ist infinitesimal für jedes reelle s. *Beweis*: Ist $s < n$, so ist $s \cdot \alpha < n \cdot \alpha$, also infinitesimal. (Oder so: α ist kleiner als jedes $\frac{r}{s}$, denn $\frac{r}{s}$ ist eine reelle Zahl. Also ist $s \cdot \alpha < r$ für jedes r.)	Dieser Beweis könnte Hausaufgabe sein.
Aussage: Sind α und β infinitesimal, dann ist $\alpha \cdot \beta$ infinitesimal. *Beweis*: Da $\beta < 1$ ist, ist $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot 1 = \alpha$, also infinitesimal.	

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
Frage: Was ist $\varrho = r + \alpha$, wenn r eine reelle Zahl ist.	
Antwort: Keine reelle Zahl. ϱ ist eine *hyperreelle Zahl*, die *unendlich nah* bei r liegt. Wir schreiben: $\varrho \simeq r$.	Begriffe *hyperreelle Zahl, unendlich nah,*
r heißt *Standardteil* oder *reeller Teil* von ϱ.	*Standardteil* ist math. Konvention, im Unterricht empfiehlt sich *reeller Teil*.
	
Um jede reelle Zahl r liegen unendlich viele unendlich nahe hyperreelle Zahlen ϱ. Alle zusammen bilden die *Monade* um r.	Begriff *Monade*
Division: *reelle Zahl durch infinitesimale Zahl*	*Unterrichtsabschnitt 3*
Frage: Was passiert, wenn wir durch unendlich kleine Zahlen dividieren? *Beispiel*: Wie groß ist $\frac{1}{\alpha}$? Wir wissen: α ist kleiner als jede positive reelle Zahl, d.h. $\alpha < r$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$. Mit r ist auch $\frac{1}{r}$ eine positive reelle Zahl. Also gilt auch $\alpha < \frac{1}{r}$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und damit durch Umformung $r < \frac{1}{\alpha}$ für alle r.	α sei durchgehend infinitesimal und positiv.
Entdeckung: $\frac{1}{\alpha}$ ist größer als jede reelle Zahl: $\frac{1}{\alpha}$ ist *unendlich groß*.	*Infinite Zahlen*

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
Frage: Wie können wir ausdrücken, was „unendlich groß“ bedeutet?	Die Idee „unendlich groß“ entsteht, wenn es beim Integral um die Anzahl der Rechtecke unter einem Funktionsgraphen geht (s. 2.2).
Beispiele: Unendlich groß ist größer als alles.	Neue Anlässe für Diskussionen.
Kann jemand eine unendlich große Zahl nennen? Unendlich groß ist eine Zahl, die man nicht auf der endlichen Zahlengeraden darstellen kann.	
Aber vorstellen kann man sie sich – im Unendlichen, so, als wenn man ein *Unendlichkeitsfernrohr* hätte.	„*Unendlichkeitsfernrohr*“
Ist Ω eine unendlich große Zahl, dann liegt sie unendlich weit entfernt von 1 und jeder noch so großen reellen Zahl r: 	Weiteres zu Veranschaulichungen s. 3.2.
Vereinbarung: Unendlich große positive Zahlen sind größer als alle positiven reellen Zahlen r. Statt „unendlich groß“ sagen wir auch „infinit“. Wir bezeichnen infinite Zahlen mit A, B, N, Γ, Ω, manchmal auch mit μ, ν usw. $\Omega \gg 1$ ist die Bezeichnung für „Ω ist unendlich groß“.	*Definition*: Ω heißt „positiv infinit“, wenn gilt: $\Omega > 0$ und $\Omega > r$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$. *Bezeichnungsvorschläge*. Zahlbezeichnungen gemeinsam vereinbaren.
Aussage: Für jedes reelle s ist $\frac{s}{\alpha}$ *unendlich groß*. *Beweis*: $\frac{1}{\alpha}$ ist größer als jedes $\frac{r}{s}$, denn $\frac{r}{s}$ ist eine reelle Zahl. Also ist $\frac{s}{\alpha} > r$ für alle r.	

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Aussage: Ist Γ infinit, dann ist $\Gamma - s$ infinit für jedes reelle s.
Hinweis: Es ist $\Gamma > r$ für alle reellen Zahlen. Daher ist auch $\Gamma > r + s$, also $\Gamma - s > r$ für alle r.</td><td>Übung?</td></tr>
<tr><td>Frage: Gibt es eine kleinste positiv-unendliche Zahl?</td><td>Diskussion!</td></tr>
<tr><td>Aussage: Ist Γ unendlich groß und ist r eine reelle Zahl, so ist $r \cdot \Gamma$ unendlich groß.</td><td>Beweis als Übung.</td></tr>
<tr><td>Rechnen mit hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$</td><td>Unterrichtsabschnitt 4</td></tr>
<tr><td>Arithmetische Terme aus reellen, infinitesimalen und infiniten Zahlen sind hyperreelle Zahlen in ${}^*\mathbb{R}$.

Beispiele:
Infinitesimale Zahlen α, β wie oben.
Infinite Zahlen A, Λ, Ω wie oben.
Reelle Zahlen r, s, t, u.
$\varrho = r + \alpha$, eine hyperreelle Zahl unendlich nah zu r.</td><td></td></tr>
<tr><td>Wenn s reell ist und B infinit, was ist $B - s$?</td><td>s. Aussage u. Hinweis in Unterrichtsabschnitt 3.</td></tr>
<tr><td>Diskutiere weitere Beispiele von additiven Kombinationen.</td><td>Übung.</td></tr>
<tr><td>Wir können diese Typen hyperreeller Zahlen unterscheiden:

<table><tr><td>finite Zahlen</td><td>Betrag kleiner als eine natürliche Zahl</td></tr><tr><td>infinite Zahlen</td><td>Betrag größer als jede positive reelle Zahl.</td></tr></table>
Zu den finiten Zahlen gehören</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>reelle Zahlen r</td><td>Von den reellen Zahlen gehen wir aus.</td></tr>
<tr><td>infinitesimale Zahlen α</td><td>Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl.</td></tr>
<tr><td>hyperreelle, nicht reelle Zahlen</td><td>unendlich nah zu einer reellen Zahl</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Das Rechnen mit positiven hyperreellen Zahlen wollen wir nach Typen ordnen. Prüfe die Felder! (Rechne linke Zahl verknüpft mit oberer Zahl!)</td><td>Besser als die Prüfung der Felder ist die Herstellung der Tafeln als Hausaufgabe, in Einzel- oder Gruppenarbeit.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$+$</th><th>infinites.</th><th>finit</th><th>reell</th><th>infinit</th></tr>
<tr><td>infinites.</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>reell</td><td>finit</td><td>finit</td><td>reell</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td></tr>
</table>
</td><td>Spalte „finit“ ohne reelle und infinitesimale Zahlen</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$-$</th><th>infinites.</th><th>finit</th><th>reell</th><th>infinit</th></tr>
<tr><td>infinites.</td><td>infinites.</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>finit</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>reell</td><td>finit</td><td>finit</td><td>reell</td><td>infinit</td></tr>
<tr><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td>infinit</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Frage: Warum ist das Feld „$infinit - infinit$“ leer?
Begründe!</td><td>Hausaufgabe, Übung?</td></tr>
<tr><td>Hinweis:
Sei Λ infinit, r reell. Dann gibt es zwei Fälle:
a) $2 \cdot \Lambda - \Lambda = \Lambda$ ist infinit,
b) $(\Lambda + r)$ ist infinit und $(\Lambda + r) - \Lambda = r$ ist reell.</td><td></td></tr>
<tr><td>Suche weitere Fälle!</td><td>Hausaufgabe, Übung.</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*

$\cdot$	infinites.	finit	reell	infinit
infinites.	infinites.	infinites.	infinites.	
finit	infinites.	finit	finit	infinit
reell	infinites.	finit	reell	infinit
infinit		infinit	infinit	infinit

Frage: Warum ist z.B. das Feld „$infinitesimal \cdot infinit$“ leer?
Begründe!

Hinweis:
dx und $dx \cdot dx$ sind infinitesimal, also $\frac{1}{dx}$ und $\frac{1}{dx \cdot dx}$ infinit. Dann ist einerseits
a) $dx \cdot \frac{1}{dx} = 1$, also reell, andererseits
b) $dx \cdot \frac{1}{dx \cdot dx} = \frac{1}{dx}$ infinit.

Suche weitere Fälle!

Hausaufgabe, Übung.

:	infinites.	finit	reell	infinit
infinites.		inf.tes.	inf.tes.	inf.tes.
finit	infinit	finit	finit	inf.tes.
reell	infinit	finit	reell	inf.tes.
infinit	infinit	infinit	infinit	

Aus Platzgründen kürzen wir hier innerhalb der Tabelle „infinitesimal“ mit „inf.tes.“ ab.

Hier sehen wir wieder leere Felder. Warum ist das Feld $infinitesimal : infinitesimal$ leer.

Hinweis:
dx und $dx \cdot dx$ sind infinitesimal. Dann ist einerseits
a) $dx : dx = 1$, also reell, andererseits
b) $dx : (dx \cdot dy) = \frac{1}{dy}$ infinit.

Wir können grob, aber zutreffend, sagen,
$dx \cdot dy$ ist „infinitesimaler“ als dx.
Auf solche Verhältnisse muss man beim Dividieren streng achten (vgl. Hauptsatz in 2.2, s. auch 4.3).

Unterrichtsgang hyperreelle Arithmetik	*Kommentar*
Begründe, warum andere Felder leer sind!	Hausaufgabe. Hier tritt der Fall „infiniterer“ Zahlen auf.
Rückblick und Ausblick	*Unterrichtsabschnitt 5*
Wir haben eine *arithmetische Theorie* aufgebaut.	Formulierung einer *Axiomatik*.
Wie sind wir vorgegangen? Was waren unsere *Grundsätze*? 1. Wir gingen aus von der *Theorie der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. 2. Wir erfanden *infinitesimale Zahlen* α, β, dx usw. 3. Die entstehenden arithmetischen Terme sind *hyperreelle Zahlen* in ${}^*\mathbb{R}$. 4. Die alten arithmetischen Aussagen und Regeln gelten in ${}^*\mathbb{R}$ weiter.	
Für die *Anwendung in der Analysis* sind wichtig: 5. Jede finite hyperreelle Zahl ϱ besitzt einen reellen Anteil (*Standardteil*) r mit $\varrho \simeq r$.	s. 2.1 und 2.2 und Kapitel 3.
6. Wir denken uns die reellen Relationen und Funktionen auf ${}^*\mathbb{R}$ *fortgesetzt*.	*Transferprinzip*

Liste der Zahlbezeichnungen,

die wir hier und in den anderen Unterrichtsskizzen sukzessive vorgeschlagen haben.

Die Bezeichnungen der natürlichen Zahlen und reellen Zahlen bleiben unangetastet. Rationale Zahlen werden in der Regel wie reelle Zahlen behandelt und bezeichnet. Für die neuen hyperreellen Zahlen schlagen wir vor, nach folgenden Regeln vorzugehen. Wir bezeichnen

- infinitesimale Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus dem Anfang des Alphabets, Ausnahme ω,
- finite hyperreelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben aus der zweiten Hälfte des Alphabets, Ausnahmen $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$,
- infinite hyperreelle Zahlen mit großen griechischen Buchstaben, die sich von den lateinischen Großbuchstaben unterscheiden. Zusätzlich $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$, z.B. als infinite Indizes in der Verbindung mit natürlichen Laufindizes i, m, n, k, l.

Liste:

infinitesimale Zahlen	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, dx, dy, ds, dt$
finite hyperreelle Zahlen für Variable	$\vartheta, \varrho, \sigma, \tau,$ η, ξ, ζ
infinite hyperreelle Zahlen aber auch	$\Gamma, \Lambda, \Pi, \Phi, \Omega$ $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$

2.3.1 Ein Beweis im Unterrichtsgespräch *[F]*

so, wie es sich zwischen Lehrerin/Lehrer (L) und Schülerinnen/Schülern (S) zutragen könnte – vielleicht etwas idealisiert?

Beweis der *Aussage*: $\alpha + \alpha = 2\alpha$ ist infinitesimal, wenn α infinitesimal ist.

L. (blickt auf Ausschnitt der Zahlengerade – vgl. 2.1): „Wir sehen auf dem Ausschnitt der Zahlengerade, wie die Infinitesimalien um die 0 herum liegen – und nirgendwo ist eine weitere reelle Zahl außer 0 zu sehen. Wo liegt denn eigentlich $\alpha + \alpha = 2\alpha$ oder $\alpha + \beta$?“
S: „Ist doch klar: auch in diesem Ausschnitt, nur weiter rechts von α bzw. β!“
L: „Anschaulich ist das klar – aber können wir das auch mathematisch beweisen? Können wir nur mit den bekannten Eigenschaften von Infintesimalien nachweisen, dass auch 2α und $\alpha + \beta$ in dem Ausschnitt liegen?“
S: „Wozu das denn? Ist doch klar! Sieht doch jeder!“
L: „Manchmal trügt aber auch der Schein und man lässt sich dadurch leicht verleiten, etwas für richtig zu halten, was aber in Wahrheit gar nicht richtig ist. Deshalb muss in Mathe eine Aussage bewiesen werden.“
S: „Also gut! Aber wie soll das denn gehen? Was müssen wir denn tun?“
L: „Naja, nehmen wir die erste Aussage: 2α soll auch in dem Ausschnitt der Zahlengerade um die 0 herum liegen, also 2α soll auch infinitesimal sein, wenn α infinitesimal ist. – Was heißt das?“

S: „Doch wohl, dass 2α kleiner ist als jede positive Zahl r."
L: „Genau! Das müssen wir zeigen!"
S: „Aber das geht doch gar nicht: α ist doch schon kleiner als r, dann ist 2α doch nur kleiner als $2r$ und nicht kleiner als r! Also stimmt das gar nicht, was wir beweisen wollen!"
L: „Moment! Nicht so schnell! – 2α soll kleiner als r werden. Dabei ist r eine beliebig kleine positive reelle Zahl, die wir uns jetzt mal fest vorgeben; r ist also beliebig, aber fest – so sagt man!"
S: „Ja, aber dann ist 2α trotzdem nicht kleiner als r, sondern nur kleiner als $2r$, wenn α kleiner ist als r."
L: „Da hast du Recht! Aber muss denn α kleiner als r sein?"
S: „Steht doch da (liest vor): ‚Eine infinitesimale Zahl α ist kleiner als jede positive reelle Zahl r.' – und nur das sollen wir doch bei dem Beweis verwenden."
L: „Genau! α ist kleiner als jede positive reelle Zahl – das ist die wichtige Aussage. Aber muss diese Zahl denn unbedingt r sein? Doch wohl nicht. Es muss nicht die Zahl r sein, die wir oben beliebig, aber fest vorgegeben haben. Es kann auch irgendeine andere reelle positive Zahl, z.B. s, sein."
S: „Also kann ich dieses s ja auch kleiner oder größer als das feste r wählen."
L: „Du hast es erfasst! Welcher Wert für s würde uns denn gut im Beweis passen?„
S: „$\frac{r}{2}$ oder noch kleiner. $\frac{r}{2}$ würde reichen: diese Zahl ist auf jeden Fall auch reell und positiv, und wenn wir $\alpha < \frac{r}{2}$ wählen – das dürfen wir ja, wie wir oben gehört haben –, dann ist $2\alpha < 2 \cdot \frac{r}{2} = r$."
L: „Super! Jetzt sind wir fertig und die obige Aussage ist nicht nur anschaulich klar, sondern auch mathematisch bewiesen."
S: „Keiner kann uns mehr was!"

Kapitel 3

Ergänzungen und Erweiterungen

3.1 Von der 0,999. . . -Frage zur Ableitung [*F/H*]

Die folgende Unterrichtsreihe stellt einen alternativen Zugang zur herkömmlichen Vorgehensweise bei der Einführung in die Differentialrechnung dar. Ausgangspunkt hierbei ist die $0,999\ldots$- Problematik, die die Schülerinnen und Schüler motiviert und auf natürlichem Weg zu den infinitesimalen Zahlen führt.

Diese Infinitesimalien dienen jedoch nicht nur als rechnerisches Kalkül, sondern auch als Beispiel für unterschiedliche mathematische Theorien, die zu unterschiedlichen Folgerungen führen.

Nimmt man die berechtige Kritik an der „Grenzwert-Analysis" ernst, dass sie oft ohne ihre eigentliche Grundlage – nämlich die Grenzwerte – unterrichtet wird, so sollte man auch die „Infinitesimal-Analysis" nicht ohne ihre eigentliche Grundlage – die Infinitesimalien – unterrichten. Deshalb wird deren Behandlung in diesem Unterrichtsgang ein angemessener Raum zur Verfügung gestellt.

Erwähnt werden muss noch, dass die Unterrichtsreihe in einem Grundkurs 11 im Schuljahr 2018/19 mit Erfolg unterrichtet wurde und dass deshalb in der „Kommentar"-Spalte auch markante Schüleräußerungen erwähnt werden (kursiv, gekennzeichnet mit „S").

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über den Verlauf der Unterrichtsreihe. *Nur die kursiv gesetzten Unterrichtsinhalte* behandeln Infinitesimalien. Von diesen wiederum betreffen nur die ersten beiden die in diesem Abschnitt behandelte Thematik.

Unterrichtsinhalte	*Infinitesimalien*
0,999... - Frage	*im Anmarsch... (4h)*
Hyperreelle Zahlen: Einführung – Verständnisfragen – Übungen	*zentral (7h)*
Lineare Funktionen: Differenzenquotient, Steigung	—
Einführung des Ableitungsbegriffs: mittlere Steigung einer Funktion, lokale Steigung einer Funktion	*als Kalkül (8h)*
Ableitungsfunktion	—
Graphisches Ableiten	—
Elementare Ableitungsregeln erarbeiten	*als Kalkül (4h)*
Ableitungsregeln anwenden	—
Eigenschaften von Funktionen/ Funktionsuntersuchungen	—
Anwendungen der Differentialrechnung	—

Unterrichtsgang

Von der 0,999. . . -Frage zur Ableitung	*Kommentar*
0,999... - Frage <u>Arbeitsblatt oder einfache Abfrage:</u> Ist $0,999\ldots$ kleiner oder gleich 1? ○ $0,999\ldots = 1$ ○ $0,999\ldots < 1$ Begründungen:	*Unterrichtsabschnitt 1* Im Rahmen einer Wiederholung des Unter- und Mittelstufenstoffes kann die Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche zur Sprache kommen, was zu durchaus produktiven Streitgesprächen führen kann. S. (pro =): *„Der Unterschied ist so gering, dass es keinen Unterschied gibt.“*

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
	S. (pro =): *„Man müsste* $0,\overline{0}1$ *zu* $0,\overline{9}$ *dazurechnen, aber diese Zahl existiert nicht."* S. (pro <): *"Auch wenn die Nachkommastellen unendlich lang sind, bleibt ein kleiner Unterschied. 0,999... ist kleiner als 1, weil die Zahl immer näher an die 1 geht, aber nie ankommt."* Im Unterrichtsgespräch zeigt sich häufig, dass die Schülerinnen und Schüler selbst bei einer Entscheidung für $0,999\ldots = 1$ eigentlich im Sinne von „$<$" argumentieren. Für die Gegenüberstellung der Begründungen beider Thesen sowie der jeweils zugehörigen Beweise bietet es sich an, die gesamte Tafel zu nutzen und die beiden Positionen jeweils konsequent am linken ($0,999\ldots = 1$) bzw. rechten ($0,999\ldots < 1$) Flügel der Tafel darzustellen, um den Schülerinnen und Schülern die „Gleichwertigkeit" der beiden Ansätze zu verdeutlichen.
<u>Beweise von $0,999\ldots = 1$:</u> a) $0,111\ldots = \frac{1}{9}$ $9 \cdot 0,111\ldots = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ $0,999\ldots = 1 \quad \square$	Die folgenden drei Beweise für $0,999\ldots = 1$ sind Standard.

<table>
<tr><th>Von der 0, 999 . . .-Frage zur Ableitung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>

b)

$$\begin{array}{rcl} 10\cdot 0,999\ldots &=& 9,999\ldots \\ -\ 1\cdot 0,999\ldots &=& 0,999\ldots \\ \hline 9\cdot 0,999\ldots &=& 9 \\ 0,999\ldots &=& 1 \qquad \square \end{array}$$

c) Arithmetisches Mittel

$$\frac{1+0,999\ldots}{2} = \frac{1,999\ldots}{2} = 0,999\ldots$$

Wenn das arithmetische Mittel zweier Zahlen gleich einer der beiden Zahlen ist, dann müssen beide Zahlen gleich sein:

$$0,999\ldots = 1 \qquad \square$$

Das klingt überzeugend!

</td><td></td></tr>
<tr><td>

<u>Aber vielleicht ist doch $0,999\ldots < 1$:</u>

</td><td>

Die folgenden *Nichtstandard*-Argumentationen bringen die drei bekannten Beweise ins Wanken bzw. widerlegen diese und bestätigen die Position $0,999\ldots < 1$.

</td></tr>
<tr><td>

Zu a): -> später . . . (vgl. S. 50)

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Zu b): Oben wurde gerechnet:

$9,999\ldots \qquad - 0,999\ldots$

$= (9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots) - (0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots)$

$= 9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots - 0,9 - 0,09 - 0,009 - \ldots$

$= 9 + (0,9 - 0,9) + (0,09 - 0,09) + (0,009 - 0,009) + \ldots$

$= 9 + 0 + 0 + 0 + \ldots$

<u>$= 9$</u>

</td><td>

Hier wird ein <u>zentrales Problem</u> deutlich:
Darf man mit unendlichen Summen rechnen wie mit endlichen?
Man denke etwa an:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$

$= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$

$= 0$

</td></tr>
<tr><td>

Aber es geht auch so:

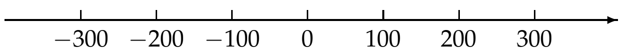
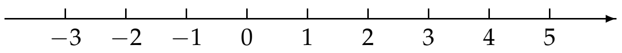
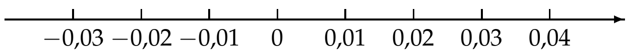
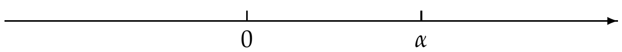
</td><td>

Aber andererseits ist:

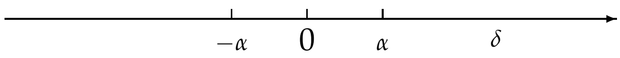
</td></tr>
</table>

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
$9.999\ldots \quad - 0,999\ldots$ $= (9+0,9+0,09+0,009+\ldots) - (0,9+0,09+0,009+\ldots)$ $= 9+0,9+0,09+0,009+\ldots - 0,9 - 0,09 - 0,009 - \ldots$ $= (9-0,9)+(0,9-0,09)+(0,09-0,009)+(0,009-0,0009)+\ldots$ $= 8,1 + 0,81 + 0,081 + 0,0081 + \ldots$ $= 8,91 + 0,081 + 0,0081 + \ldots$ $= 8,991 + 0,0081 + \ldots$ $= 8,9991 + \ldots$ $\underline{= 8,999\ldots 1}$	$1-1+1-1+1-1\pm\ldots$ $= 1-(1-1)-(1-1)-\ldots$ $= 1$ $\Longrightarrow \underline{0=1}$?
Und dann lautet b) weiter: $9 \cdot 0,999\ldots = 8,999\ldots 1$ $0,999\ldots = 0,999\ldots$!? Dies ist eine allgemeingültige Aussage, die bei keinem Beweis weiterhilft!	Den Schülerinnen und Schülern sollte an dieser Stelle klar werden, dass damit zwar die Argumentation für $0,999\ldots = 1$ ausgehebelt wird, aber nicht $0,999\ldots < 1$ bewiesen ist.
Zu c): Möglich wäre auch $\frac{1+0,999\ldots}{2} = \frac{(1+0,9+0,09+\ldots)}{2}$ $= 0,5+0,45+0,045+0,0045+\ldots$ $= 0,95 + 0,045+0,0045+\ldots$ $= 0,995 + 0,0045+\ldots$ $= 0,999\ldots 5$ Und dieses arithmetische Mittel ist <u>nicht</u> gleich einem der beiden Summanden! Also muss es zwischen $0,999\ldots$ und 1 doch noch (mindestens) eine Zahl geben! $\Longrightarrow 0,999\ldots < 1 \quad \square$ Also drängt sich die wichtige Frage auf: <u>Was ist denn nun richtig:</u>	S: „$0,999\ldots 5$ – *das Ende der Unendlichkeit kommt nie; also kommt auch die 5 nie; diese Zahl gibt es nicht!*“ S: „*Wenn ich nur natürliche Zahlen kenne, gibt es zwischen 9 und 10 auch keine Zahl mehr – vielleicht brauchen wir neue Zahlen?*“

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
$0,999\ldots = 1$ oder $0,999\ldots < 1$?	
Die Antwort kann nur lauten: Beides – je nach Theorie!!	S: *„Dieselbe Aufgabe hat 2 unterschiedliche Lösungen – das kann ja nicht sein; Mathe ist doch eindeutig!“*
In der Grenzwert-Mathematik ist $0,999\ldots = 1$; wir bewegen uns im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wir verwenden Grenzwerte, es gelten die bekannten Rechengesetze, der Vorteil: Standard seit 150 Jahren!	Es ist in der Mathematik nicht immer alles „klar“ bzw. „eindeutig“ – allerdings muss an dieser Stelle ausdrücklich dem Eindruck entgegengewirkt werden, Mathematik sei in irgendeiner Weise „beliebig“.
In der Infinitesimal-Mathematik ist $0,999\ldots < 1$; wir bewegen uns im Bereich der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ (einer Erweiterung der reellen Zahlen), es gelten die bekannten Rechengesetze, es ist zwar nicht Standard, dafür aber der Vorteil: Erfasst die Intuition!	Am Beispiel der Infinitesimalien sollen die Schülerinnen und Schüler vielmehr erkennen, dass unterschiedliche mathematische Theorien zu unterschiedlichen Folgerungen führen können, die innerhalb der jeweiligen Theorien gültig sind.
Wir entscheiden uns beim weiteren Vorgehen für die Intuition, also für die hyperreellen Zahlen. Diese wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.	
Hyperreelle Zahlen	*Unterrichtsabschnitt 2*
Einführung – Verständnisfragen – Übungen	*Rechnerische und geometrische Darstellung*
Die infinitesimale Zahl α	
Wir gehen also aus von $0,999\ldots < 1$ Die Differenz von 1 und $0,999\ldots$ beträgt ein	

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
„Unendlichstel“, wir nennen es α. Wie groß ist α? α ist nicht 0 und unendlich klein oder infinitesimal, d.h. kleiner als jede positive reelle Zahl! Wir schreiben dafür $\alpha \simeq 0$.	
α stellt eine neuartige Zahl dar, die nicht reell ist. Folglich lässt sie sich auch nicht als Dezimalbruch darstellen. Stattdessen schreiben wir: $\alpha = 1 - 0,999\ldots$ $\quad = (1;1;1;\ldots) - (0,9;0,99;0,999;\ldots)$ $\quad = (1-0,9;1-0,99;1-0,999;\ldots)$ $\alpha = (0,1;0,01;0,001;\ldots)$	Jede reelle Zahl r wird als Folge mit konstanten Gliedern notiert: $r = (r;r;r;\ldots)$; nicht-reelle Zahlen haben demgegenüber veränderliche Glieder. Die Summen- und Differenzbildung erfolgt gliedweise, ebenso die Multiplikation und Division.
Veranschaulichung von α: So kennst du die Zahlengerade ...  ... oder so ...  ... oder so ...  Aber jetzt? 	
a) Wo liegt hier 1 oder 0,1?	S: *„Man müsste α mit unendlich multiplizieren; deshalb kann (außer der Null) keine reelle Zahl auf dieser Zahlengeraden liegen.“*
b) Kannst du $\frac{1}{2}\alpha$ eintragen?	Mit 0 und α ist tatsächlich keine (weitere) reelle Zahl mehr auf der Zahlengeraden sichtbar, $\frac{1}{2}\alpha$ sehr wohl!

Von der **0,999...***-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
	S: *„Ein Unendlichstel nochmal zu halbieren, ist komisch! Man müsste $\frac{1}{2}\alpha$ mal rechnerisch ausprobieren!“*
Weitere infinitesimale Zahlen	
Gibt es außer α weitere Infinitesimalien?	
Es gibt unendliche viele infinitesimale Zahlen, z.B. $\frac{1}{2}\alpha = (0,05; 0,005; 0,0005; \ldots)$ $\beta = (\frac{1}{11}; \frac{1}{111}; \frac{1}{1111}; \ldots)$ $\gamma = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots)$ $\delta = (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \ldots)$ Diese liegen alle in infinitesimaler Nähe zu 0.	
Übungen/ weiterführende Fragestellungen: • Berechne mit den obigen Zahlen $2 \cdot \gamma$, $\gamma + \delta$, $\gamma \cdot \delta$! • Gibt es eine kleinste infinitesimale Zahl?	Übungen wie diese ermöglichen den Schülerinnen und Schülern ein unkompliziertes Annähern an die „neuen“ Zahlen. Für ein tieferes Verständnis ist die Diskussion dieser weiterführenden Frage sinnvoll und gewinnbringend.
Anordnung: Def.: Die infinitesimale Zahl $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3; \ldots)$ ist größer als die infinitesimale Zahl $\beta = (\beta_1; \beta_2; \beta_3; \ldots)$, wenn bis auf endlich viele α_i und β_i gilt: $\alpha_i > \beta_i$. In Zeichen: $\alpha > \beta$. Entsprechend wird die „<“-Relation definiert.	Mit dieser (für die Praxis ausreichenden) Definition lässt sich nun auch Beweis a) zur Gültigkeit von $0,999\ldots = 1$ (vgl. S. 45) in Frage stellen, der auf der *Standard-Annahme* $0,111\ldots = \frac{1}{9}$ gründet.
So gilt etwa in unserem Bsp.: $\alpha < \delta$.	Mit dieser Definition folgt

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
	in der *Nichtstandard-Analysis* aus $0,1 < \frac{1}{9}; 0,11 < \frac{1}{9}; \ldots$ gerade $0,111\ldots < \frac{1}{9}$. Und daraus lässt sich folgern: $9 \cdot 0,111\ldots < 9 \cdot \frac{1}{9}$ $0,999\ldots < 1$ $\square$
Darstellung an der Zahlengerade:	
Wir richten quasi eine „Unendlichkeitslupe“ auf die 0. Außer 0 liegt keine weitere reelle Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!	Vgl. Kap. 6 (Elemente 21) und hier Abschnitt 3.2. Mit der Vorgabe von 0 und α können wir auch reelle Vielfache von α genau an der Zahlengeraden verorten.
	Dies gilt nicht für δ. Von dieser Zahl wissen wir nur, dass sie größer als α ist und dementsprechend rechts von α liegen muss. δ ist jedoch kein reelles Vielfaches von α und daher nicht maßstäblich einzuzeichnen.
Rechnen mit infinitesimalen Zahlen	
Das Rechnen mit den infinitesimalen Zahlen folgt innerhalb der Folgenglieder denselben Regeln wie das Rechnen mit reellen Zahlen.	
Satz 1 (*Addition, Subtraktion, Multiplikation*): Für alle infinitesimalen Zahlen α und β und jede reelle Zahl r gilt: $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $r \cdot \alpha$ sind ebenfalls infinitesimal.	Vgl. Abschnitt 2.3, S. 33

<table>
<tr><th>Von der 0, 999 . . .-Frage zur Ableitung</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>
Komplizierter ist die Division:

<u>Satz 2</u> (Division):
Für alle infinitesimalen Zahlen α und β und jede reelle Zahl $r \neq 0$ gilt:
a) $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$,
b) $\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} \cdot \alpha \simeq 0$, d.h. ebenfalls infinitesimal,
c) $\frac{r}{\alpha} = \Gamma$ (eine unendlich große Zahl, größer als jede reelle Zahl!)
d) $\frac{\alpha}{\beta}$ kann nicht allgemein angegeben werden.

Für d) sind vier Fälle möglich, die durch folgende Beispiele erklärt werden:
• $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \Gamma$, d.h. unendlich groß,
• $\frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, d.h. eine reelle Zahl,
• $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, d.h. infinitesimal,
• $\frac{\beta+\alpha\cdot\beta}{\beta} = 1 + \alpha$, d.h. finit.

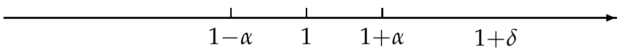
Finite und infinite hyperreelle Zahlen

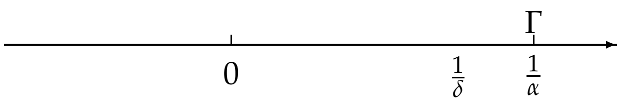
Beim Rechnen mit infinitesimalen Zahlen stoßen wir auf weitere „neue“ Zahlen.

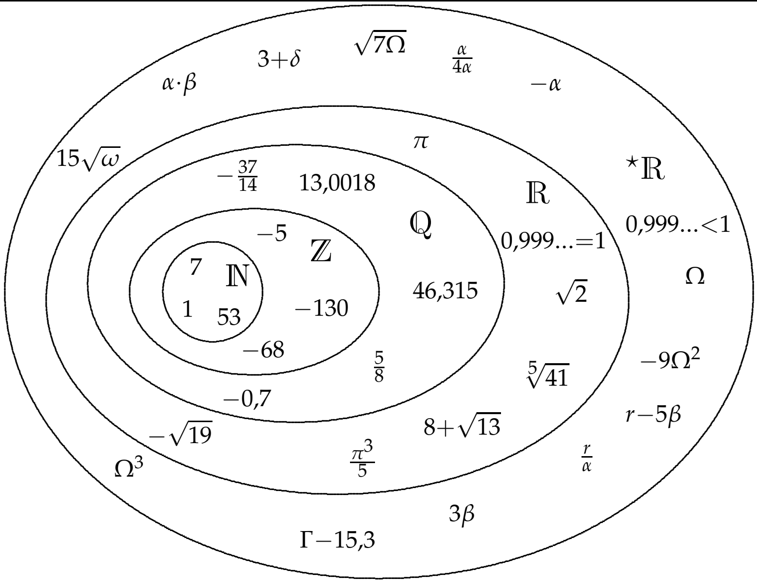
<u>Übung:</u>
Berechne mit $\alpha = (0,1; 0,01; 0,001; \ldots)$ und $\delta = (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \ldots)$
a) $1 + \alpha$, b) $\frac{1}{\alpha}$, c) $\frac{1}{\delta}$.

Zu a)
$1 + \alpha = (1; 1; 1; \ldots) + (0,1; 0,01; 0,001; \ldots)$
$= (1,1; 1,01; 1,001; \ldots)$

Dies ist eine Zahl, die weder infinitesimal noch reell ist. Sie liegt offenbar <u>in infinitesi-</u>
</td><td>
Solche Übungen zum Rechnen mit infinitesimalen Zahlen führen die Schülerinnen und Schüler gezielt zu weiteren „neuen“ Zahlen, den finiten und infiniten Zahlen.
S: „Diese Zahl ist ja ganz, ganz dicht bei der 1. Nach der anderen Theorie wäre sie sogar 1.“
</td></tr>
</table>

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
maler Nachbarschaft zur reellen Zahl 1. Def.: Eine Zahl, die infinitesimal benachbart zu einer reellen Zahl liegt, heißt finite Zahl. Satz 3 (*Zerlegbarkeit hyperreeller Zahlen*): Jede finite hyperreelle Zahl h lässt sich als Summe einer reellen Zahl r – ihrem reellen Teil – und einer infinitesimalen Zahl α – ihrem infinitesimalen Teil – schreiben: $h = r + \alpha$ Die Zahlen r und α sind hierbei eindeutig bestimmt.	
Def.: Der eindeutig bestimmte reelle Teil einer hyperreellen Zahl h soll abkürzend mit $\mathrm{rt}(h) = \mathrm{rt}(r + \alpha) = r$ bezeichnet werden.	Wir verwenden „rt". In der Fachliteratur wird meist der Begriff „Standardteil (st)" anstelle von „reeller Teil" verwendet.
Finite Zahlen auf der Zahlengeraden:	
Wir richten die „Unendlichkeitslupe" jetzt auf die 1. Außer 1 liegt keine weitere reelle Zahl auf diesem unendlich vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden!	S: *„So wie wir das bei der Null gemacht haben, müssen wir jetzt die 1 ‚herzoomen'."*
	
Beispiele infiniter Zahlen (*Lösungen zu den Übungen b) und c), S. 52*) : $\frac{1}{\alpha} = (1,1;1;\ldots) : (0,1;0,01;0,001;\ldots)$ $= (10;100;1000;\ldots)$ $\frac{1}{\delta} = (1;1;1;\ldots) : (\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\ldots) = (5;6;7;\ldots)$ Diese beiden Zahlen sind unendlich groß, d.h. größer als jede positive reelle Zahl.	S: *„$\frac{1}{\alpha}$ ist ja eine ganz, ganz große Zahl, jetzt wahrscheinlich größer als jede positive, reelle Zahl, und $\frac{1}{\delta}$ ist auch ganz, ganz groß – also beides wächst über alles, was man sich vorstellen kann, hinaus."*

Von der $\mathbf{0,999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
Denn wählt man bspw. in b) eine beliebige reelle Zahl $r = (r; r; r; \ldots)$ und vergleicht diese mit $\frac{1}{\alpha} = (10; 100; 1000; \ldots)$, so gilt sicher ab einer gewissen natürlichen Zahl n: $10^n > r$, d.h. unendlich viele Folgenglieder der Zahl $\frac{1}{\alpha} = \Gamma$ sind größer als diejenigen von r und nur endlich viele kleiner. Deshalb ist $(10; 100; 1000; \ldots) > (r; r; r; \ldots)$. Eine solche Zahl wie Γ nennt man positiv infinit. Schreibweise: $\Gamma \gg 1$.	Die Definitionen der „$<$ - und $>$ -Relation“ für die infinitesimalen Zahlen (vgl. S. 50) lässt sich auf alle hyperreellen Zahlen übertragen.
Infinite Zahlen auf der Zahlengeraden	
So wie wir bei der Darstellung der infinitesimalen Zahlen mit der „Unendlichkeitslupe“ unendlich vergrößert haben, müssen wir hier den Ausschnitt der Zahlengerade unendlich verkleinern.	S: *„$\frac{1}{\alpha}$ wächst noch mehr als $\frac{1}{\delta}$! Jetzt müssen wir die Lupe ganz nach rechts halten!“*
	Durch die unendliche Verkleinerung kann man sich alle finiten Zahlen in unmittelbarer Nachbarschaft der Null denken. In dieser Darstellung sind sie nicht mehr von Null unterscheidbar. Mit der Festlegung von 0 und $\Gamma = \frac{1}{\alpha}$ können wir – analog zur Darstellung von infinitesimalen Zahlen – für $\frac{1}{\delta}$ auch wieder nur schließen, dass diese Zahl kleiner als $\frac{1}{\alpha}$ ist und sie dementsprechend links von $\frac{1}{\alpha}$ liegen muss.
Die hyperreellen Zahlen im Überblick Man kann die Menge der hyperreellen Zahlen $^\star\mathbb{R}$ in folgendem Mengenbild darstellen:	

Von der $\mathbf{0{,}999\ldots}$*-Frage zur Ableitung*	*Kommentar*
	

Ein Vorschlag, wie man die Differentialrechnung – auch aufbauend auf dem hier dargestellten Einstieg – im Unterricht behandeln kann, wird in Abschnitt 2.1 vorgestellt.

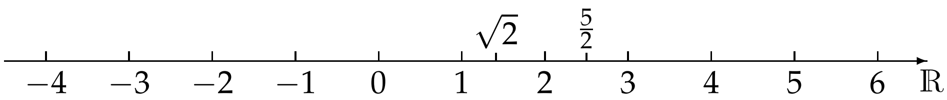
3.2 Veranschaulichung hyperreeller Zahlen [*Ba*]

In den Abschnitten 2.1 zur Ableitung und 2.2 zum Integral wurden Zahlen mit unendlich kleinem und unendlich großem Betrag verwendet, um bei Funktionsgraphen die Steigung oder den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse zu berechnen. Diese Zahlen wurden dort bereits intuitiv auf einer Zahlengeraden dargestellt und diese Darstellung in 3.1 genauer diskutiert. In den Abschnitten 2.1 und 2.2 wurde erkennbar, wie man sich Funktionsgraphen vorstellen muss, wenn man sie an einem Punkt mit einem unendlichen Faktor vergrößert.

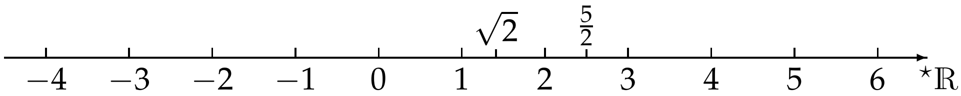
Auf den folgenden Seiten wird das Thema der Darstellung infinitesimaler und infiniter Zahlen auf einer Zahlengeraden zusammenhängend behandelt. *Dabei handelt es sich nicht um eine Unterrichtsskizze, sondern um eine systematische Ideensammlung.*

Veranschaulichung hyperreeller Zahlen	*Kommentar*
Eine Zahlengerade für $^\star\mathbb{R}$ sieht zunächst genauso aus wie für reelle Zahlen. Sie ist eine durchgezogene Linie, weil zwischen zwei Zahlen immer unendlich viele weitere Zah-	

len liegen. Lediglich an der Bezeichnung ist zu erkennen, um welche Zahlenmenge es sich handelt, sei es nun $\mathbb{R}$



oder die größere Zahlenmenge $^\star\mathbb{R}$.



Eine hyperreelle Zahlengerade bietet aber neue, über die bisherigen hinausgehende, Möglichkeiten der Veranschaulichung.
Denn zu den reellen Zahlen sind Zahlen mit unendlich großem und unendlich kleinem Betrag hinzugekommen.
Diese infiniten bzw. infinitesimalen Zahlen sind (bis auf die Null) in dieser Darstellung der Menge $^\star\mathbb{R}$ aber nicht sichtbar.
In der Menge der hyperreellen Zahlen lassen sich verschiedene Zahltypen unterscheiden, für die man verschiedene Schreibweisen vereinbaren kann.

Reelle Zahlen

wie üblich lateinische Kleinbuchstaben, also a, b, $\ldots$, r, s, $\ldots$; m, n, usw. für *natürliche Zahlen*.

Infinite Zahlen (Betrag größer als jede reelle Zahl)

griechische Großbuchstaben, also Γ, Δ, Λ, Ω, aber auch $\iota, \mu, \nu, \kappa, \lambda$, z.B. als infinite Indizes.

Infinitesimale Zahlen (Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl)

Zur Bezeichnung der verschiedenen hyperreellen Zahltypen siehe auch Abschnitt 2.3 ab Seite 31 über die hyperreelle Arithmetik.

Nicht zwingend, aber hilfreich kann es sein, für zueinander gehörende Kehrzahlen entsprechende Zeichen des griechischen Alphabets zu verwenden, also $\Omega = \frac{1}{\omega}$, $\gamma = \frac{1}{\Gamma}$ usw.

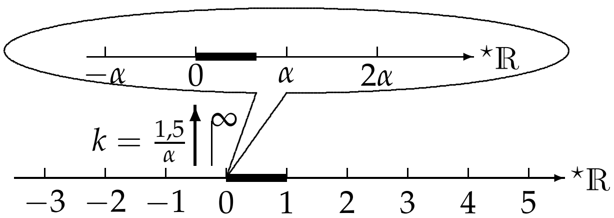
griechische Kleinbuchstaben, also α, β, γ, δ usw., oder dx, dy, dt usw.

0 ist die einzige reelle Zahl, die auch infinitesimal ist.

Weitere finite, nicht reelle und nicht infinitesimale Zahlen (Summe aus reellen und infinitesimalen Zahlen)

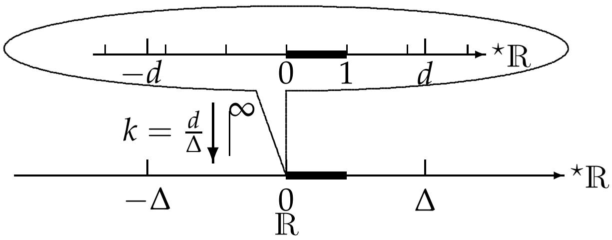
kleine griechischen Buchstaben aus der zweiten Hälfte des Alphabets, Ausnahmen $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$.

Um infinitesimale Zahlen darzustellen, ist eine Zahlengerade, wie sie bisher bekannt ist, bei der Null mit einem infiniten Faktor zu vergrößern.
Beispiel: Um die infinitesimale Zahl α darzustellen, ist z.B. mit $\frac{1{,}5}{\alpha}$ bei 0 zu vergrößern. Dann erscheint α dort, wo vorher die $1,5$ war.



Der Pfeil neben dem Vergrößerungssymbol „$|^{\infty}$“ zeigt an, dass hier durch die „Unendlichkeitsbrille“ oder die „Unendlichkeitslupe“, wie wir sagen wollen, geschaut wird.

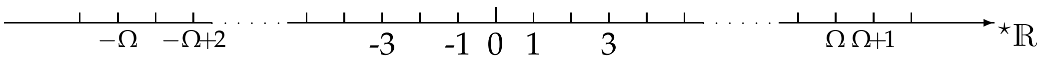
0 ist die einzige reelle Zahl, die in diesem Maßstab sichtbar ist, alle anderen reellen Zahlen sind wegen des unendlichen Vergrößerungsfaktors unendlich weit weggerückt.
Zahlen wie α^2 sind hier nicht zu sehen; dazu wäre ein weiteres Mal mit infinitem Faktor zu vergrößern.
Um infinite Zahlen darzustellen, ist ein infinitesimaler Faktor anzuwenden.
Beispiel: Um die infinite Zahl Δ darzustellen, ist mit $\delta = \frac{d}{\Delta}$ zu verkleinern, damit Δ dort erscheint, wo vorher die Zahl d war.



Man beachte hier die andere Richtung des Pfeils am Abbildungssymbol. Damit wirkt „$|^{\infty}$“ wie ein „Unendlichkeitsfernrohr“.

Alle finiten Zahlen, also auch die reellen, sind zu einem Punkt zusammengezogen. Da nun sämtliche reellen Zahlen unendlich dicht neben der Null zu denken sind, kann diese Stelle durchaus mit $\mathbb{R}$ bezeichnet werden.
Zahlen wie Δ^2 sind auch hier noch unendlich weit weg. Für ihre Darstellung müsste man noch einmal mit einem infinitesimalen Faktor schrumpfen. Dann wäre auch die Zahl Δ bei der 0 zu denken.
Finite und infinite Zahlen kann man gemeinsam in einem Bild nur unmaßstäblich darstellen.

Für die infinitesimalen Zahlen gilt dies bereits in der oberen Darstellung.

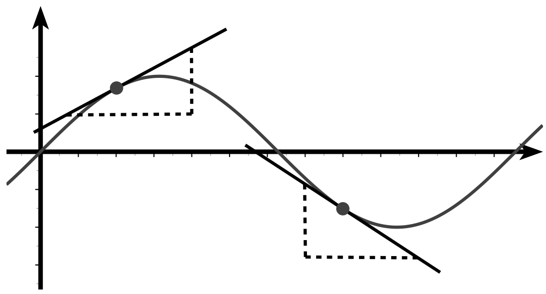


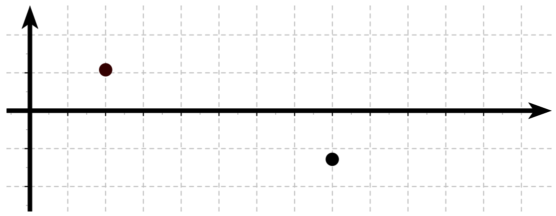
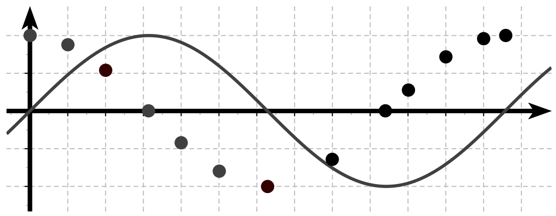
Im punktierten Bereich findet irgendwo der Übergang finit – infinit statt. Auch rechnerisch ist nicht angebbar, wo dieser Übergang ist. Denn eine Behauptung, u wäre die letzte finite, z.B. reelle, Zahl, wird sofort widerlegt, denn $u+1$ ist ebenfalls finit (und reell).

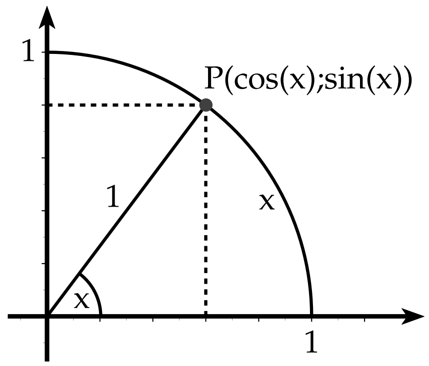
3.3 Trigonometrische Funktionen [*Ki*]

Wir wollen uns hier mit den trigonometrischen Funktionen, also sin, cos und tan, mit den Mitteln der Differentialrechnung befassen. Diese stellen eine eigene Klasse von Funktionen mit speziellen Eigenschaften dar. Insbesondere sind sie periodisch, ihre Eigenschaften wiederholen sich also mit einer bestimmten Periode in gleicher Weise.

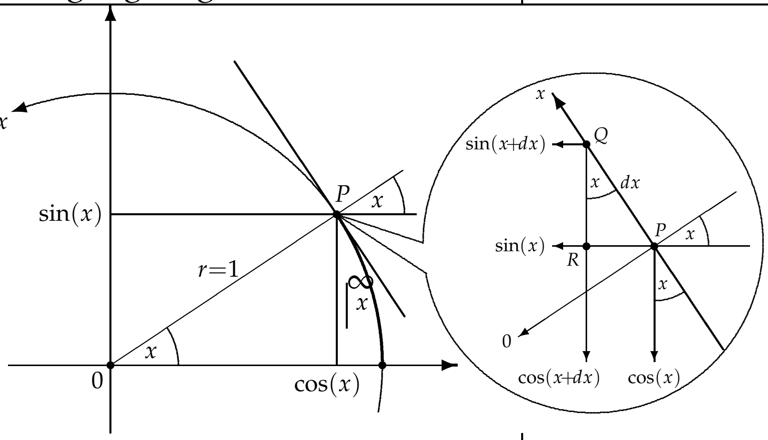
In diesem Unterrichtsgang werden wir auch das Bogenmaß eines Winkels kennenlernen. Erst damit wird es möglich, die trigonometrischen Funktionen als reelle Funktionen zu behandeln.

Unterrichtsgang trigon. Fkt.	*Kommentar*
Grafische Ableitung der Sinusfunktion Als Erstes wollen wir herausfinden, welche Ableitung die Sinusfunktion hat. Dabei können wir uns nicht auf bisher Bekanntes stützen, da die trigonometrischen Funktionen eine eigene Klasse von Funktionen darstellen. Wir müssen unsere Betrachtungen daher ganz elementar beginnen. Um einen ersten Eindruck zu bekommen, können wir die Sinusfunktion zunächst grafisch ableiten. Dazu zeichnet man in verschiedenen Punkten ihres Graphen die Tangente ein und bestimmt deren Steigung. **Aufgabe 1:** *Leiten Sie die Sinusfunktion grafisch ab. Zeichnen Sie dazu in mindestens 10 verschiedenen Punkten über die erste Periode verteilt jeweils die Tangente ein, bestimmen Sie deren Steigung und tragen Sie deren Wert in das vorgegebene (oder ein eigenes) Diagramm ein (siehe Skizzen).* 	*Unterrichtsabschnitt 1* Hier gibt es eine schöne Möglichkeit, die Lernenden grafisch ableiten zu lassen und damit den Zusammenhang zwischen Graph, Tangentensteigung und Ableitung(-sfunktion) zu festigen. Die Lernenden können dazu **auf Papier** den Graphen der Sinusfunktion ausgehändigt bekommen und müssen dann händisch die Tangenten einzeichnen und deren Steigungen mit Hilfe von geeigneten Steigungsdreiecken bestimmen. Das ist zwar relativ ungenau, führt aber dennoch zu der Vermutung, es könnte sich bei der Ableitung um die Kosinusfunktion handeln. Eleganter und genauer ist es, das grafische Ableiten **am Rechner** durchführen zu lassen (bei entsprechenden technischen Voraussetzungen). Dafür lässt sich sehr gut die Tangenten-Funktion von **GeoGebra** verwenden.

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	*Kommentar*
 Ergebnis:  Das Ergebnis des grafischen Ableitens legt die **Vermutung** nahe: *Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion.*	
Rechnerische Ableit. der Sinusfunktion Um unsere Vermutung zu bestätigen, müssen wir die Sinusfunktion rechnerisch ableiten. Dazu müssen wir auf die Definition von Sinus- und Kosinusfunktion zurückgreifen. Sinus- und Kosinusfunktion sind mit Hilfe des *Einheitskreises* definiert: Man zeichnet einen Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung. Der erste Schenkel des betrachteten Winkels mit der Größe x liegt auf der x-Achse, der zweite Schenkel schneidet den Einheitskreis im Punkt P. Dann ist $\sin(x)$ definiert als y-Koordinate von P, $\cos(x)$ ist definiert als x-Koordinate von P (siehe Skizze).	*Unterrichtsabschnitt 2* Zum **Bogenmaß**: (1) Der Scheitelpunkt des Winkels wird als Mittelpunkt eines Kreises (mit beliebigem Radius) betrachtet. Die Größe α des ebenen Winkels ist dann definiert als das Verhältnis der Länge b des Kreisbogens, den der Winkels aus dem Kreis herausschneidet, und dessen Radius r: $\alpha := \frac{b}{r}$

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	*Kommentar*
 Eine Besonderheit des Einheitskreises ist es, dass die Maßzahl der Länge des Bogens, den der betrachtete Winkel aus dem Einheitskreis herausschneidet, gleich der Größe des Winkels (im Bogenmaß) ist.	(2) Maßeinheit (Bogenmaß): Mit der Definition verwendet man sozusagen den Radius als Maßeinheit für die Bogenlänge; die Winkelgröße gibt in dieser Maßeinheit also an, wie oft der Radius in den Bogen passt. Daher der Name Bogenmaß. Die Maßeinheit der Winkelgröße ergibt sich aus ihrer Definition: $$[\alpha] = \frac{[b]}{[r]} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 1\,(\mathrm{rad})$$
Der auf der x-Achse beginnende Kreis kann daher in diesem Sinne als x-Achse betrachtet werden. Davon machen wir im Folgenden Gebrauch.	Um die Verwechslung mit einer reinen Zahlenangabe zu vermeiden, fügt man ggf. das Symbol „rad" (für Radiant) an; es hat den Wert 1 und wird beim Rechnen einfach weggelassen. Für den Einheitskreis ($r = 1$) ergibt sich aus (1) $\alpha = b$. Die Bogenlänge dort ist also gleich der Winkelgröße (im Bogenmaß).
Wir betrachten den Punkt $P(\cos(x); \sin(x))$ und stellen uns vor, dass die Figur von diesem Punkte aus mit einem infiniten Streckfaktor vergrößert wird. Der Kreis erscheint in dieser infiniten Vergrößerung als Gerade (siehe Abb.).	Zur genauen Begründung für die Streckung des Kreises siehe nach diesem Unterrichtsgang auf S. 63

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	*Kommentar*



Geht man von P aus um ein infinitesimales Stück dx in Richtung der „x-Achse“ (Kreisbogen), dann erreicht man den Punkt $Q(\cos(x+dx); \sin(x+dx))$.
Aus dem (rechtwinkligen) Dreieck PQR lässt sich jetzt einfach ablesen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+dx)-\sin(x)}{dx} &\simeq \frac{|\overline{QR}|}{|\overline{PQ}|} \\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

Es gilt also $\sin'(x) = \mathrm{rt}(\frac{\sin(x+dx)-\sin(x)}{dx}) = \cos(x)$, unsere Vermutung ist damit bestätigt:

Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion.

Ableit. Kosinus- und Tangensfunktion	*Unterrichtsabschnitt 3*

Die Ableitung der Kosinusfunktion kann nun ohne grundsätzlich neue Herleitung erschlossen werden. Es ergibt sich:

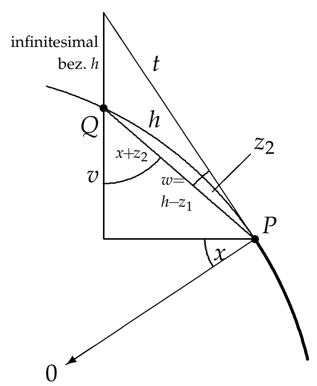
$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Unterrichtsgang Trigon. Funktionen	*Kommentar*
Aufgabe 2: *Begründen Sie diese Regel ohne Bezug auf die oben stehende Herleitung, sondern nur mit Hilfe der Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion.* **Aufgabe 3:** *Begründen Sie diese Regel unter Verwendung der oben stehende Herleitung.* Die Tangensfunktion wird definiert durch $$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} .$$ Ihre Ableitung ergibt sich daher mit Hilfe der Quotientenregel aus denen der Sinus- und der Kosinusfunktion.	

3.3.1 Zur Streckung des Kreises mit infinitem Faktor

Streng genommen muss für die Richtigkeit der nebenstehenden Herleitung sichergestellt werden, dass die *Strecke* $\overline{PQ}$ sich nur infinitesimal von der *Bogenlänge* dx unterscheidet (der Bogen PQ lässt ich in dieser Vergrößerung nicht von der Strecke $\overline{PQ}$ unterscheiden).

Daher zeigt die folgende Abbildung den vergrößerten Ausschnitt nochmals, jedoch mit einem reellen positiven Zuwachs h. Hier werden die Unterschiede zwischen dem Kreis und der Tangente in P deutlich und die Sehne $\overline{PQ}$ wird überhaupt erst bemerkt. *Sie* bildet die Hypotenuse des eigentlich zu betrachtenden Dreiecks, nicht der Kreisbogen oder die Tangente t. Ihre Länge w ist kleiner als die Bogenlänge h, also $w = h - z_1$ mit positivem z_1. Ferner liegt zwischen der Sehne und der Vertikalen durch Q ein um z_2 größerer Winkel vor als x zwischen der Tangente und dieser Vertikalen.



Die Länge der Ankathete ist der zu h gehörige Unterschied v zweier Sinuswerte.

Hieraus ergibt sich $v = w \cdot \cos(x + z_2) = (h - z_1)\cos(x + z_2)$.

Zu untersuchen ist also

$$\frac{v}{h} = \frac{h - z_1}{h} \cdot \cos(x + z_2)\ .$$

Zur Bestimmung einer Ableitung muss h infinitesimal und verschieden von null gewählt werden. Zusammen mit dem Unterschied zwischen Kreis und Tangente sind dann auch z_1 und z_2 infinitesimal, und zwar sogar infinitesimal im Verhältnis zu h. Das bedeutet für z_1, dass es eine infinitesimale Zahl α gibt und $z_1 = \alpha \cdot h$ gilt. Daher wird

$$\frac{v}{h} = \frac{h - h\alpha}{h} \cdot \cos(x + z_2) = (1 - \alpha) \cdot \cos(x + z_2)\ .$$

Nunmehr lässt sich die gesuchte Ableitung $\sin'(x)$ als reeller Teil (Standardteil) ablesen:

$$\begin{aligned}\sin'(x) = \mathrm{rt}(\frac{v}{h}) &= \mathrm{rt}\left((1 - \alpha) \cdot \cos(x + z_2)\right) \\ &= \mathrm{rt}\,(1 - \alpha) \cdot \mathrm{rt}\,(\cos(x + z_2)) = 1 \cdot \cos(x).\end{aligned}$$

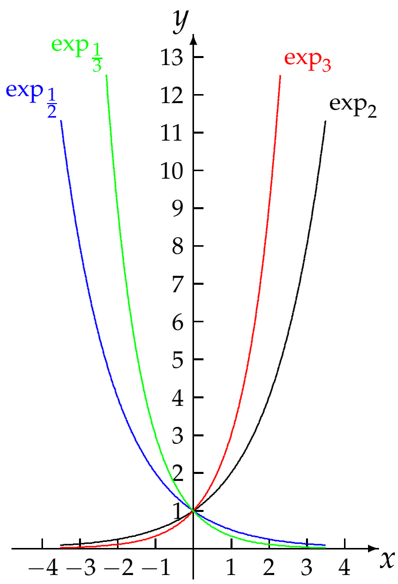
Hierbei wurde die Gleichung $\mathrm{rt}\,(\cos(x{+}z_2)) = \cos(\mathrm{rt}(x{+}z_2)) = \cos(x{+}0)$ benutzt, denn die Kosinusfunktion ist bei x stetig.

3.4 Einstieg in Exponentialfunktionen [*Ba*]

Die Exponentialfunktionen sind eine neue Klasse von Funktionen. Bei ihnen sind gegenüber den bisher betrachteten Potenzfunktionen die Rollen von Basis und Exponent vertauscht. Der Unterricht beginnt, wie schon in der *Standardanalysis* üblich, mit der Betrachtung solcher Funktionen mit verschiedenen Basen, um deren Eigenschaften zu ermitteln.

Die Ableitung wird dann mit den inzwischen bekannten Mitteln der *Nichtstandardanalysis*, also aus den Koordinaten zweier infinitesimal benachbarter Punkte des Graphen, errechnet. Die Erkenntnis, im Ableitungsterm die Funktion selbst wiederzufinden, motiviert die Suche nach einer Basis, bei der der Faktor bei der Ableitung verschwindet, also gleich 1 ist.

Diese spezielle Basis e wird mit den Mitteln der *Nichtstandardanalysis* auf anschauliche Weise errechnet.

Zum Unterricht über e	**Kommentar**
1.) Eine neue Klasse von Funktionen	
Funktionen, bei denen die Variable im Exponenten auftritt, nennt man *Exponentialfunktionen*.	*Der Unterricht beginnt also so, wie man ihn aus der* Standardanalysis *kennt.*
Bezeichnung: $\exp_a$ mit $\exp_a(x) = a^x$. Offenbar gibt es viele Exponentialfunktionen, die sich alle in der Basis a unterscheiden. Welche Basen möglich und erlaubt sind, wird gleich erörtert.	Genau wie andere Funktionen, z.B. sin oder ln, haben auch Exponentialfunktionen einen eigenen Namen: $\exp_a$.
Zunächst einige Graphen:  	
Die wichtigsten Eigenschaften: • Alle Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse.	

- Der Punkt $(0;1)$ liegt auf allen Graphen.
- Die x-Achse ist Asymptote, d. h. die Graphen nähern sich ihr, ohne sie je zu erreichen.
- Die Graphen zweier Exponentialfunktionen verlaufen spiegelbildlich zur y-Achse, wenn ihre Basen Kehrzahlen voneinander sind.

Natürlich können noch viele weitere Eigenschaften von Exponentialfunktionen zusammengetragen werden.

Kann jede reelle Zahl a Basis einer Exponentialfunktion sein?

- Die Beispiele zeigen nur Graphen mit positiven Basen.
- Wäre $a = 1$, dann verliefe der Graph parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0;1)$. Er wäre einfacher beschrieben mit $f(x) = 1$. Schon deshalb kann $a = 1$ entfallen. Der wichtigere Grund ist aber, dass eine Funktion $\exp_1$ nicht umkehrbar wäre.
- Entsprechendes gilt für $a = 0$. Der Graph hätte sogar eine Lücke bei $(0;0)$, denn die Potenz 0^0 ist nicht definiert.
- Negative Basen sind sinnlos, denn dann müssten auch Terme wie $(-3)^{\frac{1}{2}}$ erklärt sein.

Das Thema Umkehrung von Funktionen ist in der Regel noch nicht im Unterricht besprochen und bleibt insofern nur angedeutet.

Also sind Exponentialfunktionen zu definieren als $\exp_a$ mit

$$\exp_a(x) = a^x, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ a \in \mathbb{R}_+, \ \ a \neq 1.$$

<table>
<tr><td>

2.) Ableitung von Exponentialfunktionen

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Wie üblich wird die Steigung zwischen infinitesimal benachbarten Punkten des Graphen ermittelt. Der reelle Teil davon ist dann die Ableitung der Funktion.
Seien also $P_1(x\,;\,\exp_a(x))$ und
$P_2(x+\alpha\,;\,\exp_a(x+\alpha))$ zwei Punkte des Graphen einer Funktion $\exp_a$, deren x-Werte sich um ein infinitesimales α unterscheiden. Dann erhält man für die Steigung zwischen diesen Punkten und dann für die Ableitung

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\exp_a(x+\alpha)-\exp_a(x)}{(x+\alpha)-x} = \frac{a^{x+\alpha}-a^x}{\alpha} = \frac{a^x\cdot a^\alpha - a^x}{\alpha} = a^x\cdot\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\,,$$

</td><td>

Hier kommt *Nichtstandardanalysis* ins Spiel.

</td></tr>
<tr><td>

$$\exp_a'(x) = a^x\cdot \mathrm{rt}\left(\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right)\ .$$

Exponentialfunktionen besitzen also sich selbst als Ableitung, aber multipliziert mit einem von der Basis a abhängigen Faktor.
Welchen Wert besitzt der Faktor, mit dem $\exp_a$ beim Ableiten zu multiplizieren ist?
Der Faktor ist offenbar ein Quotient von der Struktur $\frac{\text{infinitesimal}}{\text{infinitesimal}}$. Ob er einen reellen Teil besitzt und wenn ja, welchen, bedarf einer genaueren Untersuchung.

</td><td>

rt steht wieder für den *reellen Teil*.

</td></tr>
<tr><td>

Schätzt man seinen Wert ab, indem man z.B. statt des infinitesimalen α den Wert $0,001$ nimmt, dann erhält man zum Beispiel für die Basen 2 und 3

- $\exp_2'(x) \approx 0,6934\cdot\exp_2(x)$ und
- $\exp_3'(x) \approx 1,099\cdot\exp_3(x)$

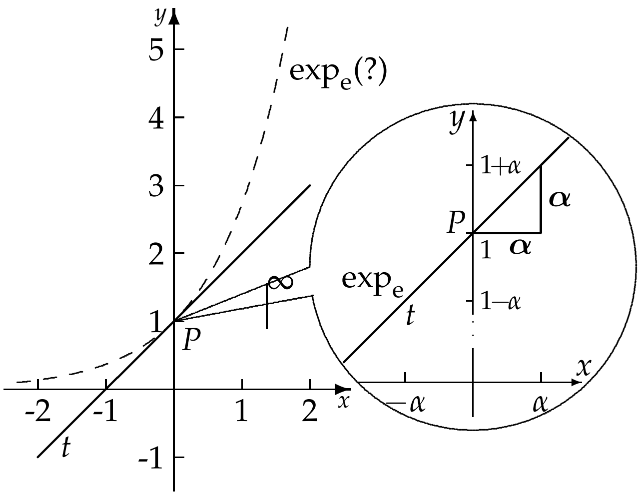
(sowie die entsprechenden negativen Werte für $\exp_{\frac{1}{2}}$ und $\exp_{\frac{1}{3}}$).

</td><td>

Hier ist es durchaus empfehlenswert, mit verschiedenen (natürlich nicht infinitesimalen) Einsetzungen für α zu experimentieren, damit die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung entwickeln können, was bei sukzessiver Verkleinerung der Einsetzung geschieht.

</td></tr>
</table>

Daraus entsteht die Frage, ob man eine Basis finden kann, bei der der Faktor verschwindet, also den Wert 1 annimmt. Der Wert dieser Basis müsste nach obigen Abschätzungen zwischen 2 und 3 liegen. Dann hätte man eine Funktion, die tatsächlich sich selbst als Ableitung besitzt. Diese Basis soll nun gesucht werden.	
3.) Die besondere Basis e	
Zunächst soll die reelle Basis die Bezeichnung **e** erhalten, weil es sich um eine spezielle **E**xponentialbasis handelt.	
Es soll $\mathrm{rt}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha}\right) = 1$ gelten, d.h. der reelle Teil (Standardteil) des beim Ableiten entstehenden Terms soll infinitesimal benachbart zu 1 sein: $\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha} \simeq 1$.	Hier sollte durchaus auf den Ursprung der Bezeichnung e hingewiesen werden, wie sie von Euler eingeführt wurde. Der Begriff „Eulersche Zahl“ ist nicht von ihm.
Diese „$\simeq$“-Beziehung wäre nach e aufzulösen.	Dies ist möglich, sofern man bei Umformungen im Finiten bleibt, denn es bedeutet Gleichheit der reellen Teile.
Da die Funktion $\exp_e$ sich selbst als Ableitung besitzt, gilt für jedes x, dass dort die Funktion selbst und ihre sämtlichen Ableitungen denselben Wert haben.	
Mit $\exp_{\mathrm{e}}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ muss auch die Tangente an den Graphen in $P(0\,;\,1)$ die Steigung 1 besitzen. Damit ist die Tangente in der folgenden Graphik bereits festgelegt, sie besitzt die Gleichung $t(x) = x + 1$.	



Die Unendlichkeitslupe $|^{\infty}$ zeigt an, dass mit einem infiniten Faktor vergrößert wird.

Betrachtet man nun die Umgebung des Punktes P mit der Unendlichkeitslupe, so unterscheiden sich der Graph von $f(x) = \mathrm{e}^x$ und die Tangente t nur infinitesimal.

Mit infinitesimalem α gilt folglich: $\mathrm{e}^{\alpha} \simeq \alpha + 1$

Mit $\alpha = \frac{1}{\Omega}$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{1}{\Omega}} &\simeq \frac{1}{\Omega} + 1 \\ \mathrm{e} &\simeq \left(1 + \frac{1}{\Omega}\right)^{\Omega} \end{aligned}$$

und damit schließlich: $\mathrm{e} = \mathrm{rt}\left((1 + \frac{1}{\Omega})^{\Omega}\right)$.

Dies entspricht der Beziehung $\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha} \simeq 1$.
Die Zulässigkeit der Umformung im letzten Schritt wird im Abschnitt 5.1 erörtert und für den Beweis auf Abschnitt 11.3 in (Elemente 21) verwiesen.

Wo ist e auf einer Zahlengeraden zu suchen? Um diese Frage zu beantworten, ist eine Dezimalschreibweise zu finden. Da Ω nicht wie eine Dezimalzahl eingesetzt werden kann, nimmt man stattdessen eine „große“ natürliche Zahl.

Die folgende mit dem Taschenrechner ermittelte Tabelle zeigt, bei welchen Einsetzungen n statt Ω wieviel Dezimalstellen für e gesichert sind.

n	Näherungswert
10	2,593742460
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
10000000	2,718281693

Hervorgehoben sind jeweils die Ziffern, die sich gegenüber dem vorhergehenden Wert nicht mehr verändert haben.

Mit modernen Rechenanlagen erfährt man heute zum Beispiel

$$\mathbf{e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369996\ldots}$$

Eine Dezimalangabe für e wird, soviel können wir hier schon vermuten, voraussichtlich nie exakt sein.

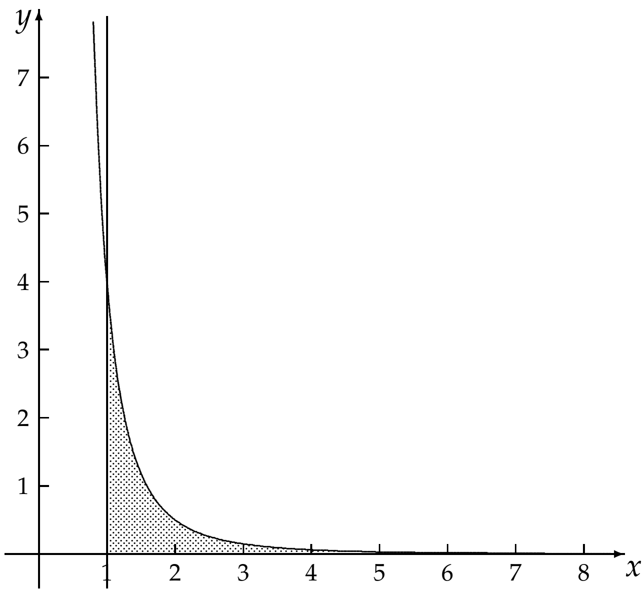
Es folgt nun der übliche Unterricht über Exponentialfunktionen.

3.5 Uneigentliches Integral [*F/H*]

Im Folgenden wird eine kurze Unterrichtssequenz zum „Uneigentlichen Integral“ vorgestellt, die sich an die Behandlung des Integrals (s. Abschnitt 2.2) anschließen kann. Auch hier kommt man ohne die üblichen Grenzwertprozesse aus. Die aus der *Standard-Mathematik* bekannten Grenzwerte können mit Hilfe der hyperreellen Zahlen exakt **berechnet** werden.

Von einem „uneigentlichen Integral“ spricht man, wenn entweder der Integrationsweg oder der Integrand im Integrationsintervall unbeschränkt ist, aber das Integral dennoch existiert, d.h. endlich ist (konvergiert).

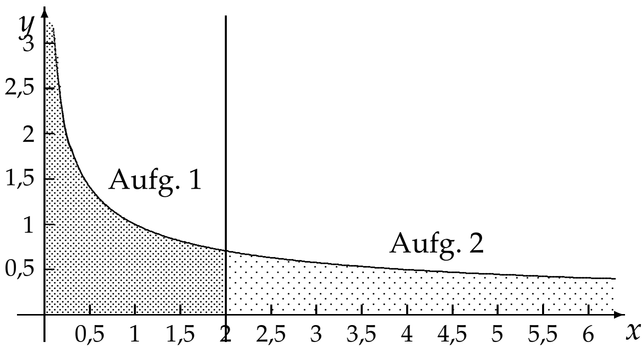
Unterrichtsgang Uneigentliches Integral	*Kommentar*
Einstiegsaufgabe: *Liz und ihr Freund Fritz beschäftigen sich gerne mit mathematischen Fragestellungen. So hat Liz gehört, man könne in einem Gedankenexperiment mit einem Pinsel und einer 750ml-Farbdose (Ergiebigkeit: 9m^2) ein Flächenstück anstreichen, das sich bis ins Unendliche(!) erstreckt!*	

Unterrichtsgang Uneigentliches Integral	*Kommentar*
 *Es geht um die Fläche A, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{4}{x^3}$, der Geraden $x = 1$ und der x-Achse begrenzt wird. (Einheit: 1m). Kann das sein?* *Wie könnte der Dialog zwischen Liz und Fritz aussehen?*	Zu erwartende Äußerungen: – Wie soll das gehen, wenn ich unendlich weit laufen muss? – Da brauche ich doch sicher auch unendlich viel Farbe! – Allerdings wird das Flächenstück ja immer schmaler ... – Das, was dazu kommt, wird immer weniger ... – Da war doch was: Wir müssen „infinit“ weit laufen, aber der Zuwachs an Fläche ist „infinitesimal“ – und das Produkt „infinit · infinitesimal“ kann alles Mögliche ergeben. Das müssen wir genauer untersuchen ...!
Problem: Die Variable x wird beliebig groß. Die Fläche dehnt sich längs der x-Achse bis ins Unendliche aus! Idee: Wir integrieren von 1 bis zu der unendlich großen oberen Grenze Ω – und setzen am Ende der Rechnung $\frac{1}{\Omega} = \alpha$:	Auch in der *Standard-Analysis* ist dieses Beispiel üblich. Rein formal ergibt sich kein wesentlicher Unterschied zur bekannten Vorgehensweise:
$\begin{aligned} \int_1^\Omega \frac{4}{x^3}\,dx &= \int_1^\Omega 4 \cdot x^{-3}\,dx \\ &= \left[\frac{4}{-2} \cdot x^{-2}\right]_1^\Omega \\ &= -2 \cdot \Omega^{-2} - (-2) \cdot 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} A &= \int_1^\infty \frac{4}{x^3}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \int_1^z 4 \cdot x^{-3}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[\frac{4}{-2} \cdot x^{-2}\right]_1^z \end{aligned}$

Unterrichtsgang Uneigentliches Integral	*Kommentar*
$= -\frac{2}{\Omega^2} - (-2) = -2\alpha^2 + 2$ $= 2 - 2\alpha^2$	$= \lim_{z\to\infty}[-2z^{-2} - (-2)\cdot 1]_1^z$ $= 0 + 2 = 2$
Der reelle Teil dieser finiten Zahl stellt den gesuchten Flächeninhalt A dar. Also $A = \mathrm{rt}(2 - 2\alpha^2) = 2.$ *Kommentar: Die Gleichungskette oben zeigt, dass die Integralfunktion* $\int_1^x \frac{4}{x^3}\,dx$ *nach dem Transferprinzip (S. 40) ins Hyperreelle fortgesetzt ist. Im Unterricht muss dieser Transfer nicht thematisiert werden.*	Während man jedoch hier mit „streben“ und „annähern“ argumentieren muss – was auch immer sich Schülerinnen und Schüler darunter vorstellen –, kann in der *Nichtstandard-Analysis* die Fläche direkt **berechnet** werden.
Antwort auf die Einstiegsaufgabe: Berücksichtigt man die Einheiten, so handelt es sich bei dem Flächeninhalt um 2m^2. Die Farbe reicht tatsächlich bei Weitem aus, um die Fläche zu streichen. Die Farbdose wird niemals leer, obwohl man unendlich weit läuft! Was es in Mathe alles gibt . . . !	Interessante Diskussionen können hier entstehen, wenn von Schülerseite etwa hinterfragt wird, ob da nicht immer noch ein Stück Fläche fehle, wenn man „nur“ bis Ω integriert; man könne ja auch bis $(\Omega + 1)$ oder 10Ω oder überhaupt bis zur infiniten Zahl $\Gamma > \Omega$ integrieren. Dem ist entgegenzuhalten, dass sich etwa im Falle $\Gamma > \Omega$ gemäß durchgeführter Integration dasselbe Ergebnis ergibt: $A = \mathrm{rt}(2 - \frac{2}{\Gamma^2}) = 2.$ Es ist also korrekt, beim Lösen dieses Problems immer *irgendeinen* Repräsentanten einer infiniten Zahl

<table>
<tr><th>Unterrichtsgang Uneigentliches Integral</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>

Übungsaufgabe 1:
Berechne den Inhalt der Fläche A, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, von der Geraden $x = 2$ und beiden Koordinaten-Achsen im 1. Quadranten begrenzt wird.



</td><td>

bei der oberen Integrationsgrenze zu wählen, da die „fehlende“ Restfläche stets einen infinitesimalen Inhalt besitzt.

</td></tr>
<tr><td>

<u>Problem:</u> Die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert. Die gesuchte Fläche dehnt sich längs der y-Achse bis ins Unendliche aus!
<u>Idee:</u> Analog zur Einführungsaufgabe integrieren wir nun von der <u>unendlich kleinen unteren Grenze α</u> bis 2:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_\alpha^2 x^{-0,5}dx = \left[\frac{1}{0,5}\cdot x^{0,5}\right]_\alpha^2 \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

</td><td>

In der *Standard-Analysis* wird analog zur Einstiegsaufgabe diesmal zunächst von z ($0 < z < 2$) bis 2 integriert. Man erhält einen von z abhängigen Term und lässt dann z „gegen 0 streben“, während in der *Nichtstandard-Mathematik* der Flächeninhalt wieder direkt **berechnet** wird.

</td></tr>
<tr><td>

Der reelle Teil der finiten Zahl ist der gesuchte Flächeninhalt; also

$$A = \mathrm{rt}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\alpha}) = 2\sqrt{2}\,.$$

</td><td>

Auch hier könnte hinterfragt werden, ob nicht ein Stück Fläche zwischen y-Achse und $x = \alpha$ fehle. Wie im Kommentar oben bereits geschildert, wird

</td></tr>
</table>

Unterrichtsgang Uneigentliches Integral	*Kommentar*
	man hier entsprechend eine beliebige infinitesimale Untergrenze β mit $\beta < \alpha$ wählen – die Integration führt dann zu $A = \mathrm{rt}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\beta}) = 2\sqrt{2}$,
In beiden betrachteten Aufgaben wächst der Flächeninhalt nicht über alle Grenzen hinaus, obwohl entweder der Integrationsweg unbegrenzt ist oder die Funktion im betrachteten Intervall unbeschränkt ist. Er ist endlich, lässt sich exakt berechnen und wird als **uneigentliches Integral** bezeichnet. Mindestens eine Integrationsgrenze ist in diesen Fällen nicht reell, sondern echt hyperreell.	also zum gleichen Ergebnis, da auch hier die fehlende Restfläche infinitesimal ist. Bei der Lösung dieses Aufgabentyps darf man folglich immer einen beliebigen Repräsentanten einer infinitesimalen Zahl bei der unteren Integrationsgrenze wählen, da die „fehlende" Restfläche immer infinitesimal ist.
Übungsaufgabe 2: Berechne den Inhalt der Fläche A, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, von der Geraden $x = 2$ und der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird. Skizze: s. Aufgabe 1	Abschließend empfiehlt es sich, noch ein Beispiel wie dieses zu betrachten, bei dem der Flächeninhalt tatsächlich unbegrenzt ist.
Wir bilden ein Integral analog zur Einführungsaufgabe: $\int_2^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_2^{\Omega} x^{-0,5}dx = \left[\frac{1}{0,5} \cdot x^{0,5}\right]_2^{\Omega} = 2\sqrt{\Omega} - 2\sqrt{2}\,.$ Diese Zahl ist infinit und damit ist auch der Flächeninhalt unbegrenzt. Das zugehörige uneigentliche Integral existiert demnach nicht!	

3.6 Limes-Schreibweise und reeller Teil *[F]*

Sowohl in gängigen Lehrwerken als auch in Klausur- und zentralen Abituraufgaben findet man die Limes-Schreibweise. Diese wird in der *Standard-Mathematik* im Zusammenhang mit dem „propädeutischen Grenzwertbegriff" bzw. dem „inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriff" (übliche Formulierungen in den Lehrplänen der verschiedenen Bundesländer) in der Schule verwendet, um das „Streben" oder „sich Nähern" von x-Werten gegen bestimmte reelle Zahlen oder auch $\pm\infty$ zu bezeichnen.

In der *Nichtstandard-Mathematik* ist diese Limes-Schreibweise nicht zwingend nötig. Doch damit Schülerinnen und Schüler, die auf diese Weise unterrichtet werden, bei entsprechenden Prüfungen keine Nachteile erleiden, muss erklärt werden, wie diese Schreibweise in der *Nichtstandard-Mathematik* gedeutet wird.[1]

Betrachten wir folgende Beispielaufgabe:

Bestimme $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

Wie geht der *Standard-Mathematik*-Schüler vor?

Er bemerkt beim „Annähern" an 2, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0 „streben". Ein unbestimmter Ausdruck ist entstanden. Theoretisch könnte er nun mit den Regeln von De L'Hospital weiterkommen, doch diese stehen ihm in Klasse 11 vermutlich nicht zur Verfügung. Ein guter Schüler erinnert sich womöglich, dass beim Vorhandensein der Zählernullstelle 2 ein Linearfaktor der Form $(x - 2)$ in der Zählerfunktion vorliegen muss:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

Also: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x - 1)$.

Er setzt nun (nicht korrekt!) den Wert 2 in $(x - 1)$ ein und erhält schließlich $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1.$

Ein Schüler, dem die o.g. Linearfaktorzerlegung nicht geläufig ist, wird eventuell das Problem dadurch zu lösen versuchen, indem er „dicht" bei 2 gelegene Werte, wie etwa $2,1$ oder $2,01$ oder $1,99$ in die Funktion $f(x) =$

[1] Es sei auch auf das Kap. 9 (Elemente 2021) und den Artikel Lingenberg (2019) über den Zusammenhang von Folgengrenzwerten und reellem Teil (Standardteil) hingewiesen.

$\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ einsetzt und dann beobachtet, ob sich die zugehörigen Funktionswerte einer bestimmten Zahl „annähern“.

Obige Beispielaufgabe könnte für einen *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler etwa folgendermaßen lauten:

Untersuche, wie sich die Funktion $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$ verhält, wenn man sich in infinitesimaler Umgebung von 2 befindet.

Der Schüler setzt (korrekt!) die hyperreelle Zahl $(2+\gamma)$ mit $\gamma \simeq 0, \gamma \neq 0$ in $f(x)$ ein (Anmerkung: Rein formal erinnert dieses Vorgehen an dasjenige, das im Standard-Fall als letztes beschrieben wurde – dort aber kann der Schüler nur „vermuten“, dass der Grenzwert 1 ist, aber exakt beweisen kann er es auf diese Weise nicht):

$$\begin{aligned} f(2+\gamma) &= \frac{(2+\gamma)^2-3(2+\gamma)+2}{(2+\gamma)-2} = \frac{4+4\gamma+\gamma^2-6-3\gamma+2}{\gamma} \\ &= \frac{\gamma+\gamma^2}{\gamma} = 1+\gamma \simeq 1\,. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Funktionswerte von $f(x)$ liegen in infinitesimaler Nähe zu 1, wenn sich x in infinitesimaler Nähe zu 2 befindet.

Also liegt für den *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler folgende Vereinbarung nahe:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$ bedeutet $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} \simeq 1$, wenn $x \simeq 2$ und $x \neq 2$,

oder auch

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$ bedeutet $\operatorname{rt}\left(\dfrac{(2+\gamma)^2-3(2+\gamma)+2}{(2+\gamma)-2}\right) = 1$ für infinitesimales $\gamma \neq 0$.

Betrachten wir eine weitere typische Aufgabe aus der *Standard-Mathematik*:

Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-3}$.

Der *Standard-Mathematik*-Schüler formt um:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}\,.$$

Er wendet die im propädeutischen Sinne erwähnten und notwendig unbewiesenen Grenzwertsätze für Funktionen an und erhält weiter:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

Also insgesamt: $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = 0.$$

Der *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler soll das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$$

untersuchen, wenn x infinit wird.

Er setzt eine infinite Zahl Γ mit $\Gamma \gg 1$ in $f(x)$ ein, formt um und rechnet(!) weiter:

$$f(\Gamma) = \frac{2\Gamma+1}{\Gamma^2-3} = \frac{\Gamma^2(\frac{2}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2})}{\Gamma^2(1 - \frac{3}{\Gamma^2})} = \frac{\frac{2}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2}}{1 - \frac{3}{\Gamma^2}}\,.$$

Sowohl die beiden Summanden im Zähler als auch der zweite im Nenner sind infinitesimal, so dass gilt:

$$f(\Gamma) \simeq \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

$\Longrightarrow$ Die Funktionswerte von $f(x)$ sind infinitesimal, wenn x infinit wird.

Also liegt für den *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler folgende Vereinbarung nahe:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = 0 \quad \text{bedeutet:} \quad \frac{2x+1}{x^2-3} \simeq 0\,, \text{wenn } x \gg 1\,,$$

oder auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3} = 0 \quad \text{bedeutet} \quad \mathrm{rt}\left(\frac{2\Gamma+1}{\Gamma^2-3}\right) = 0 \text{ für infinites } \Gamma.$$

Ein weiteres interessantes Beispiel betrifft die Fibonacci-Folge

$$(f_n) = (0;\,1;\,1;\,2;\,3;\,5;\,8;\,13;\,21;\,\ldots)\,,$$

bei der sich – ausgehend von den ersten beiden Folgengliedern 0 und 1 – jedes weitere Folgenglied als Summe der beiden vorhergehenden ergibt. Es gilt also

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ . \tag{3.1}$$

Es soll untersucht werden, ob die Quotientenfolge der Fibonnaci-Zahlen $(\frac{f_{n+1}}{f_n})$ für $n > 0$ konvergiert. Hier hilft die *Formel von Binet*, mit der man die Fibonacci-Zahlen direkt berechnen kann; man braucht also die beiden Vorgänger bei der Berechnung nicht!

Diese Formel lautet: $f_n = \dfrac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$.

Wie ist Binet auf diese rekursionsfreie Darstellung der f_n gekommen? Wir machen einen kurzen

Einschub.

Binets genialer Ansatz bestand darin, die Rekursionsvorschrift (3.1) bestehe aus drei aufeinander folgenden Potenzen, deren Basis x zu bestimmen ist:

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\ . \tag{3.2}$$

Formt man äquivalent um, so erhält man:

$$x^{n+2} - x^{n+1} - x^n = (x^2 - x - 1) \cdot x^n = 0\ .$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \textit{und} \quad \psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\ .$$

Sie erfüllen somit die Gleichung (3.2).

Setzen wir

$$g(n) = a \cdot \varphi^n + b \cdot \psi^n,\ a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

so erfüllt $g(n)$ für geeignete a, b die Rekursionsvorschrift (3.1). Denn es gilt

$$\begin{aligned} g(n+2) - g(n+1) - g(n) &= (a\varphi^{n+2} + b\psi^{n+2}) - (a\varphi^{n+1} + b\psi^{n+1}) - (a\varphi^n + b\psi^n) \\ &= a(\varphi^{n+2} - \varphi^{n+1} - \varphi^n) + b(\psi^{n+2} - \psi^{n+1} - \psi^n) \\ &= a\varphi^n \underbrace{(\varphi^2 - \varphi - 1)}_{=0} + b\psi^n \underbrace{(\psi^2 - \psi - 1)}_{=0} = 0\,, \end{aligned}$$

also $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$.

Um a und b passend zu bestimmen, verwendet man die beiden Bedingungen für f_0 und f_1:

$g(0) = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a,$

$g(1) = 1 \Longrightarrow a \cdot \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - a \cdot \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 1 \Longrightarrow \dfrac{a}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 1.$

Das ergibt $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ und $b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, und damit erhält man die Darstellung von Binet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] .$$

Wir wenden uns wieder der Quotientenfolge der Fibonnaci-Zahlen $(\frac{f_{n+1}}{f_n})$ für $n > 0$ zu. Konvergiert diese Folge?

Wendet man das Ergebnis der Polynomdivision

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = (a^{n+1} - b^{n+1}) : (a^n - b^n) = a + \frac{b^n \cdot (a-b)}{a^n - b^n}$$

auf $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \sqrt{5}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} .
\end{aligned}$$

Ab dieser Stelle argumentiert der *Standard-Mathematik*-Schüler:

Da $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, ist $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ eine Nullfolge, und daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Der *Nicht-Standard*-Schüler sagt:

Da $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, ist für $\Gamma \gg 1$: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\Gamma \simeq 0$ und damit weiter

$$\frac{f_{\Gamma+1}}{f_\Gamma} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Also liegt für den *Nichtstandard-Mathematik*-Schüler folgende Vereinbarung nahe:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bedeutet $\frac{f_{\Gamma+1}}{f_\Gamma} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für infinites Γ.

oder auch

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bedeutet $\mathrm{rt}\left(\frac{f_{\Gamma+1}}{f_\Gamma}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für infinites Γ.

Grenzwert und reeller Teil stellen übrigens den „Goldenen Schnitt“ dar!

Allgemein:

1) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = g; a, g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(a+\gamma) \simeq g}$ **für infinitesimale** $\gamma \neq 0$,

oder auch

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = g; a, g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{rt}(a+\gamma) = g}$ **für infinitesimale** $\gamma \neq 0$,

2) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = g; g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(\Gamma) \simeq g}$ **für infinite** $\boldsymbol{\Gamma}$,

oder auch

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = g; g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{rt}(f(\Gamma)) = g}$ **für infinite** $\boldsymbol{\Gamma}$.

Übungen (Nichtstandard):

1. Bestimme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{5}{x}-2}{\frac{3}{x}+1}$.

   Lösung: $f(\gamma) = \dfrac{\frac{5}{\gamma}-2}{\frac{3}{\gamma}+1} = \dfrac{\frac{5-2\gamma}{\gamma}}{\frac{3+\gamma}{\gamma}} = \dfrac{5-2\gamma}{3+\gamma} \simeq \dfrac{5-0}{3+0} = \dfrac{5}{3}$ und damit
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{x}-2}{\frac{3}{x}+1} = \frac{5}{3}.$$

2. Bestimme $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+1}{x-3}$.

   Lösung: $f(\Gamma) = \dfrac{2\Gamma^2+1}{\Gamma-3} = \dfrac{\Gamma(2\Gamma+\frac{1}{\Gamma})}{\Gamma(1-\frac{3}{\Gamma})} = \dfrac{2\Gamma+\frac{1}{\Gamma}}{1-\frac{3}{\Gamma}}$.
   Der Zähler ist infinit, der Nenner infinitesimal benachbart zu 1; also ist $f(\Gamma)$ infinit, und damit existiert der gesuchte Grenzwert nicht!

3. Bestimme $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} f(25+\gamma) &= \frac{\sqrt{25+\gamma}-5}{(25+\gamma)-25} = \frac{\sqrt{25+\gamma}-5}{\gamma} \\ &= \frac{\sqrt{25+\gamma}-5}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{25+\gamma}+5}{\sqrt{25+\gamma}+5} \\ &= \frac{(25+\gamma)-5^2}{\gamma(\sqrt{25+\gamma}+5)} = \frac{\gamma}{\gamma(\sqrt{25+\gamma}+5)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25+\gamma}+5} \simeq \frac{1}{\sqrt{25+0}+5} = \frac{1}{10} \quad \text{und damit} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25} = \frac{1}{10}.$$

Abschließende Bemerkung:

Vergleicht man das Vorgehen beim Lösen der aufgeführten Beispiele und Übungen in der *Standard-* und *Nichtstandard-Mathematik* miteinander, so erkennt man im rein formalen Vorgehen durchaus Übereinstimmungen; allerdings verwendet die *Standard-Mathematik* den propädeutischen Grenzwertbegriff mit all seinen Folgerungen und muss demzufolge auf unklare Begriffe wie „streben“ und „sich nähern“ zurückgreifen, wohingegen in der *Nichtstandard-Mathematik* die Grenzwerte exakt berechnet werden können!

Für den begrifflichen Zusammenhang von reellem Teil und Grenzwert verweisen wir auf das Kapitel 9 im Lehrbuch (Elemente 2021).

3.7 Die Regel von De L'Hospital [*F*]

Häufig stößt man bei Funktionen vom Typ $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ auf unbestimmte Ausdrücke, wenn beispielsweise $g(c)$ und $h(c)$ beide infinitesimal oder beide infinit sind, wie in der Verknüpfungstabelle für die Division „:“ auf S. 39 bereits beschrieben wurde.

In der Standard-Mathematik treten diese Probleme auf, wenn entweder die Grenzwerte von Zähler- und Nennerfunktion beide 0 oder beide ∞ sind. Diese Fälle werden üblicherweise abkürzend mit $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ bezeichnet.

Dazu drei Beispiele:

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x)}$

Offenbar ist die Funktion f an der Stelle 0 nicht definiert. Für infinitesimales $\alpha \neq 0$ erhält man $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$, wobei sowohl $g(\alpha)$ als auch $h(\alpha)$ infinitesimal sind und daher der Quotient unbestimmt ist.

Ersetzt man anschaulich die Graphen von $g(x)$ und $h(x)$ in den Punkten $(\alpha\,;\,g(\alpha))$ bzw. $(\alpha\,;\,h(\alpha))$ näherungsweise durch die jeweiligen Tangenten dort an den Graphen und bildet man den Quotienten aus den jeweiligen Tangentensteigungen (Ableitungen), so liefert dieser einen geeigneten Näherungswert für $\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)}$.

Also: $f(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \simeq \dfrac{g'(\alpha)}{h'(\alpha)} = \dfrac{\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} \simeq \dfrac{0}{2} = 0\,.$

2. $f(x) = \dfrac{2x-\pi}{\cos(x)}$

   Kritische Stelle von $f(x)$ ist $\frac{\pi}{2}$. Für infinitesimales α erhält man

   $f(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \frac{g(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{h(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ und damit einen unbestimmten Wert, da Dividend und Divisor beide infinitesimal sind.

   Geht man wie im Beispiel 1 vor, also mit der Näherung durch die beiden Ableitungen, so ergibt sich

   $$f(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \frac{g(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{h(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \simeq \frac{g'(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{h'(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{2}{-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \simeq \frac{2}{-1} = -2\,.$$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

   Für infinites Γ ergibt sich $f(\Gamma) = \frac{g(\Gamma)}{h(\Gamma)}$, wobei sowohl $g(\Gamma)$ als auch $h(\Gamma)$ infinit sind und daher der Quotient unbestimmt ist. Argumentiert man auch hier wie im Beispiel 1 mit den Ableitungen von g und h als Näherungswert für den zunächst unbestimmten Quotienten, so kommt man scheinbar nicht weiter, denn

   $f(\Gamma) = \frac{g(\Gamma)}{h(\Gamma)} \simeq \frac{g'(\Gamma)}{h'(\Gamma)} = \frac{2\Gamma}{e^\Gamma}$; dieser neu entstandene Quotient liefert wieder einen unbestimmten Wert, da nach wie vor Dividend und Divisor infinit sind.

   Wendet man jedoch erneut die geschilderte Überlegung jetzt auf die Ableitungen an, so erhält man

   $$f(\Gamma) = \frac{g(\Gamma)}{h(\Gamma)} \simeq \frac{g'(\Gamma)}{h'(\Gamma)} \simeq \frac{g''(\Gamma)}{h''(\Gamma)} = \frac{2}{e^\Gamma} \simeq 0\,.$$

Was hier ausschließlich anschaulich (und nicht exakt!) an drei Beispielen dargestellt wird, ist die Aussage der **Regel von De L'Hospital**, die eben genau dieses Vorgehen rechtfertigt:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.

Für $c \in {}^{\star}\mathbb{R}$ seien sowohl $g(c)$ als auch $h(c)$ beide infinitesimal bzw. beide infinit.

Existieren dann $g'(c)$, $h'(c)$ sowie $\frac{g'(c)}{h'(c)}$ und beide Ableitungen sind nicht zugleich infinitesimal oder infinit, dann gilt

$$\frac{g(c)}{h(c)} \simeq \frac{g'(c)}{h'(c)} \,.$$

Ist $\dfrac{g'(c)}{h'(c)}$ finit, dann gilt: $\mathrm{rt}\left(\dfrac{g(c)}{h(c)}\right) = rt\left(\dfrac{g'(c)}{h'(c)}\right)$.

<u>Anmerkung:</u> Falls eine Potenzfunktion $g(x) = x^r$, ($r \in \mathbb{N}$), und eine Exponentialfunktion $h(x) = \mathrm{e}^{kx}$, ($k > 0$), „streiten“, wenn man etwa deren Quotient im Infiniten untersucht, dann setzt sich stets die Exponentialfunktion durch, denn nach r-maligem Anwenden der Regel von De L'Hospital gilt für $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$$\frac{g(c)}{h(c)} \simeq \frac{g^{(r)}(c)}{h^{(r)}(c)} = \frac{r!}{k^r \mathrm{e}^{kc}} \simeq 0 \,.$$

Kapitel 4

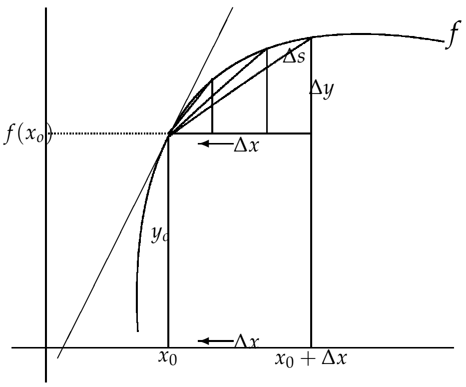
Grenzwertprozesse oder infinitesimale Zahlen? Ein Vergleich. [*Be*]

Zur Thematik des Buches *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard* (Elemente 21), das für unsere Arbeit die Grundlagen bereitstellt und die historische Entwicklung schildert, gehört die Gegenüberstellung und der Vergleich der Elemente. Wir fassen hier die wichtigsten Ergebnisse zusammen, die uns den Vergleich und eine Einschätzung der Einstiege in die Analysis, mit hyperreellen Zahlen oder Grenzwerten, ermöglichen. Es geht zuerst um die Grundgedanken und Grundvorstellungen in beiden Zugängen in die elementare Analysis (vgl. Kap. 2 (Elemente 21)). Wir erinnern an die Details in unserem Einstieg hier im Kapitel 2 und vergegenwärtigen uns den üblichen Grenzwerteinstieg.

4.1 Ableitung

Man denke an die Einstiegssituation in 2.1 im Unterrichtsgang. Wie ein Einstiegsproblem auch immer aussieht, es wird um eine reelle Funktion gehen, man wird eine Veranschaulichung suchen und einen Funktionsgraphen zeichnen. Wir orientieren uns an der geometrischen Interpretation einer Problemstellung, die über Sekantendreiecke (die Steigungen oder Zuwächse veranschaulichen) zur Vorstellung einer Tangente in einem Punkt und zur Tangentensteigung führen soll.

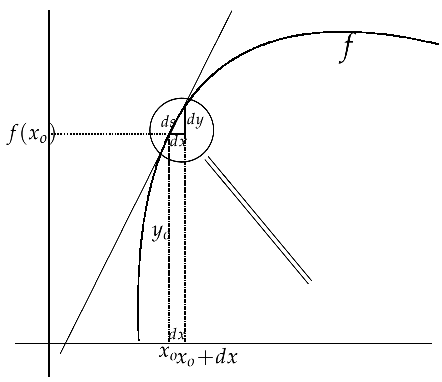
Sei f die reelle Funktion. Wie gehen wir vor, wenn wir an Grenzwerte denken? Gewöhnlich entsteht ein Bild wie das folgende.



Das Bild zeigt: Die Hypotenusen von immer kleiner werdenden Sekantendreiecken nähern sich in einem unendlichen Prozess dem Funktionsgraphen. Wir denken, dass Schülerinnen und Schüler sich vorstellen, wie die Hypotenusen sich dabei der gesuchten Tangente nähern. Im unendlichen Prozess verschwinden die Sekantendreiecke samt Hypotenuse im Berührungspunkt $(x_0, f(x_0))$ der gesuchten Tangente. Zugleich, so sollen Schülerinnen und Schüler denken, strebt der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen die Steigung der Tangente. Das ist das Ziel, der Grenzwert, der dann *Ableitung* von f bei x_0 heißt. Mit der Punktsteigungsformel wird die Tangente bestimmt.

Die Heuristik beginnt im infinitesimalen Zugang wie im Grenzwerteinstieg mit dem Annäherungsprozess der Sekantendreiecke. Man denkt nur anders: Die Sekantendreiecke verschwinden *nicht*. Sie „enden“ quasi, wie in der folgenden Abbildung, in einem unendlich kleinen Dreieck mit infinitesimalen Seiten dx, dy, ds, das man sich geometrisch vorstellt. Es ist das alte „charakteristische Dreieck“, mit dem vor 350 Jahren alles begann und das wir in der Abbildung unten sehen.

Im Unterricht kommt die Idee des unendlich Kleinen von den Schülerinnen und Schülern. Die Veranschaulichung des Dreiecks (dx, dy, ds) gehört ganz natürlich dazu. Das unendlich Kleine war historisch keine bloße Fiktion (s. Abschnitt 8.2 in (Elemente 21)) und ist es auch für Schülerinnen und Schüler nicht. Es ist eine geometrische Idee, die die endlichen Idealisierungen in der Geometrie fortsetzt. Die „Unendlichkeitslupe“, die die infinitesimalen geometrischen Verhältnisse sichtbar macht, ist kein methodischer Trick, sondern legitim. Das zeigt K. Kuhlemann im Kapitel 6 (Elemente 21) für stetig differenzierbare Funktionen.



Heuristisch beginnt, das haben wir eben bemerkt, der infinitesimale Weg wie der Grenzwertweg, mit einer unendlichen Folge kleiner werdender Sekantendreiecke. Ist das unendlich kleine Dreieck aber erst einmal „da“, braucht der infinitesimale Einstieg den unendlichen Prozess nicht mehr. Nicht allein ein reiner Zahlenwert, der Grenzwert, der die Steigung der Tangente angibt, ist das Ziel des infinitesimalen Zugangs. Das Ziel ist zwar auch dieser Wert, als reeller Teil (Standardteil) des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$. Zusätzlich geht es um die „sichtbare“

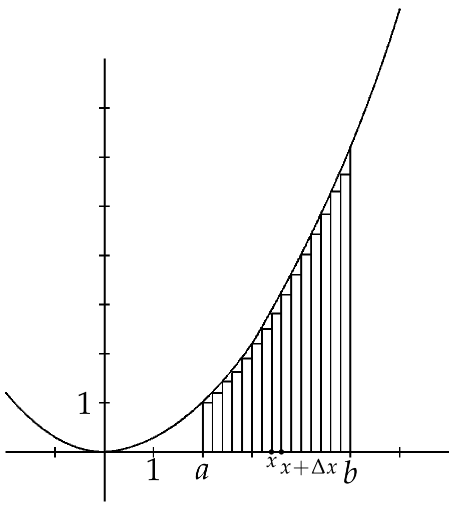
Steigung, nämlich die der Hypotenuse im unendlich kleinen Sekantendreieck. Die Hypotenuse ist Teil der Tangente *und* der Kurve. – So hat als erster Leibniz gedacht, der Kurven als Zusammensetzung von unendlich kleinen Linien auffasste.

So verschieden die Vorstellungen sind, so wenig unterscheiden sich zunächst die beiden Zugänge im Rechnen. Der Unterschied ist nur, dass man auf dem Grenzwertweg mit den *Differenzen* Δx , Δy, im infinitesimalen Zugang mit den *Differentialen* dx, dy rechnet. Das Standardbeispiel $f(x) = x^2$ ist in 2.1 (S. 15) ausgeführt, einmal mit dx im Unterrichtsgang und daneben im Kommentar mit Δx angedeutet. Gravierend wird der Unterschied im Rechnen später, wenn es um Regeln der Differentiation (ab S. 16) geht.

Der Rechenweg im Grenzwertzugang schließt mit einer Grenzwertbildung, der Rechenweg mit infinitesimalen Zahlen schließt mit der Bildung des „reellen Teils“ (Standardteils). Der Übergang zum reellen Teil ist ein arithmetischer Schritt über die arithmetische Relation $\simeq$, aber durchaus auch verknüpft mit der Vorstellung, *dx nach dem Rechnen* schließlich gegen Null streben zu lassen. So scheint Cauchy gedacht zu haben (vgl. Abschnitt 8.3 in (Elemente 21).

4.2 Integral

Wir orientieren uns wieder am Beispiel. Die übliche Veranschaulichung aus der Praxis des Grenzwerteinstiegs für die Einführung des Riemann-Integrals sieht so aus:

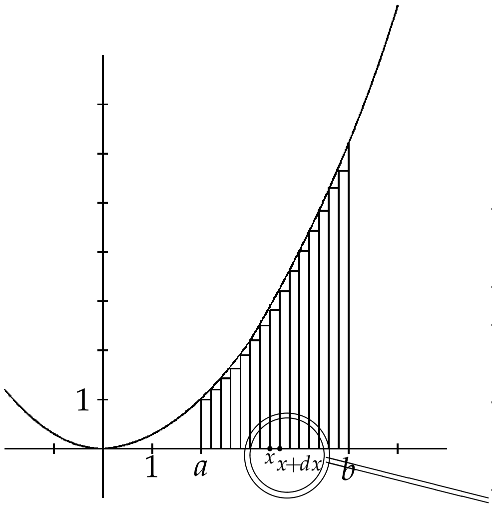


Dies ist eine Momentaufnahme, so denken wir heute und so sollen unsere Schüler denken, beim Verschwinden der Δx, verbunden mit der Vorstellung, dass sich verschwindende Rechteckflächen in ihrer Summe einer Fläche nähern, deren Inhalt das bestimmte Integral ist.

Wir versuchen jetzt, *anders zu denken* – so wie Leibniz sich die Situation vorstellte. Die Heuristik ist die gleiche: Sie beginnt im infinitesimalen Zugang wie eben, mit einem Prozess, den man sich vorstellt, in dem Rechteckflächen immer schmaler werden. Jetzt aber verschwinden die Rechteckflächen *nicht*. Sie „enden“ quasi in unendlich kleinen Rechteckflächen. Das müssen dann infinit viele sein.

Der Unterschied ist minimal: Aus Δx wird dx. Wir sind aber nicht mehr in einem Prozess, in dem Δx gegen 0 strebt, sondern sind in einem festen

Zustand: dx ist unendlich klein. Wir nehmen uns wieder die Unendlichkeitslupe und sehen im folgenden Bild unendlich schmale Streifen der Breite dx. Die Summe der infinit vielen, sagen wir μ, Rechteckflächen *ist* (bis auf einen unendlich kleinen, also vernachlässigbaren Unterschied) der gesuchte Flächeninhalt, das bestimmte Integral.



Im Kern – mit den Bezeichnungen in der Abbildung – verläuft für gewöhnliche Funktionen, wie sie in der Schule vorkommen, die Definition des Riemannschen Integrals grob so:

– dx sei unendlich klein. Also ist μ, die Zahl der Intervalle, unendlich groß.
– Dann ist $a + \mu \cdot dx = b$, $x_k = a + k \cdot dx$.
– Der Flächeninhalt der Streifen ist $dx \cdot f(x_k)$.
– Die Fläche unter der Kurve ist $\sum_{k=0}^{\mu} f(a + k \cdot dx) \cdot dx$.
– Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Standardteil dieser unendlichen Summe.

Wir bemerken: Das Integral ist, so wie es historisch war, wieder eine Summe – bis auf die infinitesimale Abweichung. Die Anzahl der Summanden ist unendlich und die Summe dennoch arithmetisch berechnet. Das erweist sich, wie wir im Unterrichtsgang gesehen haben, als äußerst effektiv. Man denke an den Beweis des Hauptsatzes (s. 2.2 und S. 91).

4.3 Vergleich

Gravierend ist von vornherein:

> Der Grenzwertzugang beruht in der Schule weitgehend auf einer unklaren Propädeutik des Grenzwertbegriffs.
>
> Denn Grenzwerte brauchen unendliche Prozesse, die in der Regel – nicht nur – von Schülern als potentiell unendlich, d.h. als offen aufgefasst werden.
>
> Es bleibt eine Kluft zwischen den Grenzwerten und den unendlichen, nicht endenden Prozessen (vgl. Bedürftig (2018), Abschnitt 4.).

Beim infinitesimalen Zugang ist das anders.

> Dem infinitesimalen Zugang liegt eine klare, mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitete Arithmetik zugrunde.

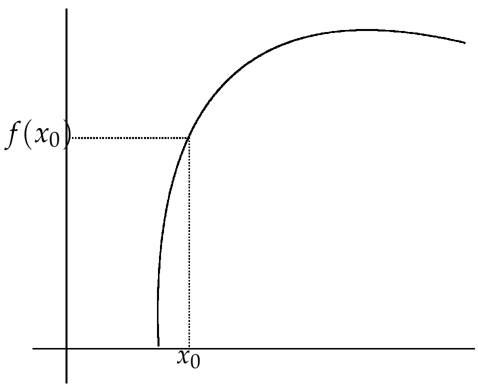
> Nach der Heuristik, die offen unendliche Prozesse beobachtet, fällt die Problematik des „aktual“ Unendlichen weg, das Mengen und Prozesse als Ganze setzt.

Der letzte Satz ist überraschend. Es muss vorsichtiger heißen: Die Problematik des Unendlichen verlagert sich. Sie wird in die *Arithmetik* versetzt. Das Unendliche ist, wenn die Arithmetik erarbeitet ist, arithmetisch erfasst. Denn:

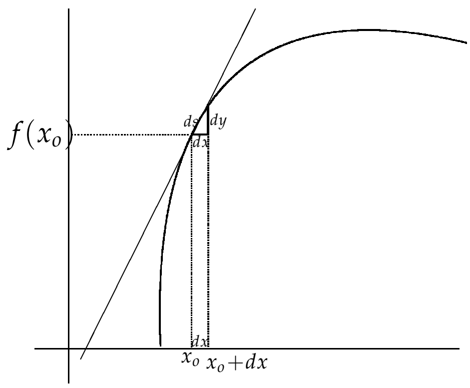
> Das Unendliche ist in den infiniten und infinitesimalen Zahlen arithmetisch *gegeben*.

Es geht im infinitesimalen Zugang nicht um unendliche Mengen, die abstrakt als abgeschlossene Ganze zu denken sind, und nicht um offen-unendliche Folgen, die wie fertige Mengen behandelt und wie beendet gedacht werden müssen. Die infiniten Zahlen, mit denen man rechnet, *sind* das Unendliche. Das ist eine gravierend andere Situation. Die infiniten Zahlen bilden gerade das Instrument, Unendliches zu erfassen. Beispiel: Die unendliche Menge infinitesimaler Intervalle wird beim Integrieren durch eine infinite Anzahl μ erfasst.

Die Erarbeitung der Arithmetik ist grundlegend. Dass sie auch in Grundkursen zu bewältigen ist, zeigen Folien aus dem Unterricht (vgl. Basiner (2019), Fuhrmann/Hahn (2019), Heinsen (2019)). Aus einem Leistungskurs berichtet Dörr (2017).



Sekanten-Dreiecke, $\Delta x \to 0$, „Endstation“



Sekanten-Dreiecke, $\Delta x \to dx$, „Endstation“

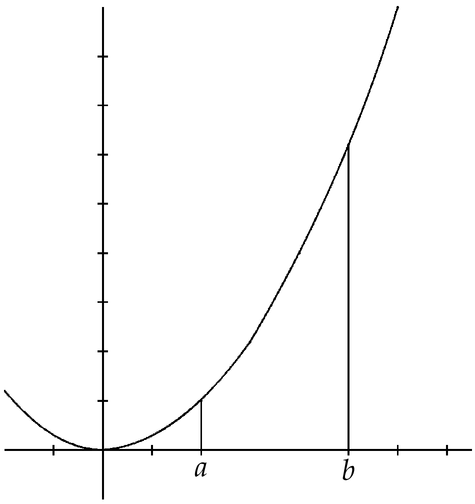
Ein anderes wesentliches Unterscheidungsmerkmal der beiden Zugänge kommt aus der *Anschauung* – ganz abgesehen von der Problematik des Grenzwertes. Wie ist es beim Differenzieren mit der Anschaulichkeit bestellt? Oben haben wir in beiden Zugängen an einen unendlichen Prozess kleiner werdender Sekantendreiecke gedacht. Jetzt machen wir, oben in den beiden Abbildungen, ein Gedankenexperiment: Wir sehen die beiden „Endergebnisse“ des Prozesses.

Im Grenzwertzugang bleibt anschaulich nur der Punkt übrig, mit dem man begonnen hat und in dem man sich eine Tangente vorstellen soll. Für die Schüler verschwindet die Anschauung der Hypotenusen der Sekantendreiecke. Was bleibt, ist die Idee einer Tangente und die Idee eines Zahlenwerts als Grenzwert von Zahlenverhältnissen – und die Kluft zwischen Prozess und Wert.

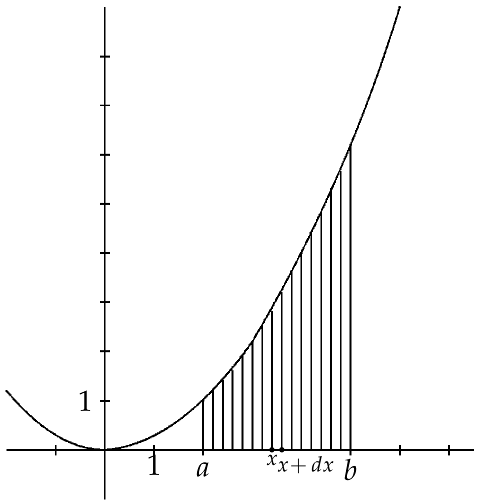
Im infinitesimalen Zugang bleibt die Anschauung erhalten. Die Heuristik des Prozesses wird mit der Idee, der *Vorstellung*, des unendlich Kleinen abgeschlossen. Das infinitesimale Steigungsdreieck ist anschaulich *da*, in dem man die Steigung sehen *und* berechnen kann: die Steigung der unendlich kleinen Hypotenuse, die Teil der Tangente *und* der Kurve ist.

Da die Anschauung einen großen Stellenwert im Lernprozess hat, so muss man den infinitesimalen Zugang als methodisch überlegen ansehen. Unsere Einstiege zur Ableitung und zum Integral mündeten nicht in einen abstrakten Formalismus, sondern in eine *anschaulich-geometrische* Situation und eine *elementare* Arithmetik.

Wir stellen jetzt, im nächsten Gedankenexperiment, die „Endzustände“ der Veranschaulichungen des Riemann-Integrals im Grenzwert- und infinitesimalen Zugang einander gegenüber:



Integral standard, „Endstation“ $\Delta x = 0$

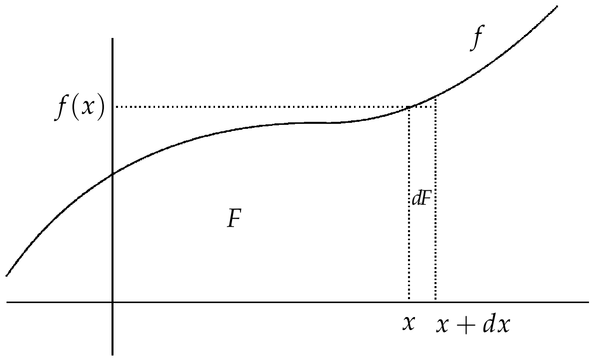


Integral nonstandard, „Endstation“ dx

Hier entspricht das anschauliche Ergebnis im Grenzwertzugang ganz unserer Vorstellung der Fläche unter der Kurve zwischen a und b. Die Streifen $f(x) \cdot \Delta x$ und deren Summation sind verschwunden.

Im Zugang mit infinitesimalen Zahlen bleibt hingegen eine Differenz zu dieser Fläche, und in der Tat ist die infinite Summe der infinitesimalen Streifen hyperreell und die reelle Fläche „nur“ deren Standardteil. Der gravierende Vorteil im infinitesimalen Zugang, wie sich gleich beim Hauptsatz zeigt, ist gerade, dass die *Anschauung der Summation* von Flächen und die Summendarstellung *nicht* verschwunden sind. Im Ergebnis ist der Flächeninhalt eine konkrete Summe. Im Grenzwertzugang ist der Flächeninhalt ein gedachter Grenzwert, dem sich ein Prozess von Summationen von verschwindenden Summanden nur nähert.

Wir erinnern an den Hauptsatz im Abschnitt 2.2, wählen eine etwas andere Skizze im infinitesimalen Zugang und *sehen* quasi den Beweis:



Wir sehen

- $dF = F(x + dx) - F(x).$

  Da f im Intervall $[x, x + dx]$ bis auf einen infinitesimalen Fehler konstant ist, ist

- $dF \simeq f(x) \cdot dx$, also

- $F'(x) \simeq \frac{dF}{dx} \simeq f(x)\,.$

Diese Argumentation finden wir in einer Aufgabenbearbeitung durch einen Schüler im Unterricht von J. Dörr (*Dörr 2017*, S. 46).

Eine grundsätzliche arithmetische Vorsicht aber ist geboten, da die Relation $\simeq$ bei Division durch infinitesimale Zahlen nicht notwendig erhalten bleibt. Die Rechnung hier aber ist korrekt, wie man wieder *sieht*. Denn der Fehler, sichtbar im infinitesimalen Dreieck zwischen Kurve und dem Rechteck $f(x) \cdot dx$, ist kleiner als das kleine Rechteck $dx \cdot dy$, und das ist infinitesimal im Verhältnis zum infinitesimalen Rechteck $f(x) \cdot dx$. Denn das Rechteck $dx \cdot dy$ berechnet sich aus zwei infinitesimalen Strecken, das Rechteck $f(x) \cdot dx$ aus einer endlichen und einer infinitesimalen Strecke.

Im Grenzwertzugang ist der Beweis des Hauptsatzes sehr viel schwieriger und in der Schule fast unerreichbar. Kern des Beweises ist auch hier die „Idee" (Behrends (2004), S. 95, Abbildung 6.25), die oben schon der Beweis ist, nämlich die Betrachtung von dF.

4.4 Schluss

Wir haben an wesentlichen Stellen die Vorteile des arithmetischen Zugangs festgestellt, plädieren aber dafür, Grenzwerte *und* Infinitesimalien zu thematisieren und zu diskutieren. Auch wenn sich im Unterricht die Waage zu der Seite der Infinitesimalien neigen wird, was wir für naheliegend halten, wird der „propädeutische Grenzwertbegriff" nicht verdrängt. Er behält seinen intuitiven Wert.

Beides machen? Wo soll man die Zeit dafür hernehmen? Wie wir es sehen, braucht der „propädeutische Grenzwertbegriff" selbst kaum Zeit, da er heuristisch ist und zu den Redeweisen über „Nähern" und „Fließen" nur Veranschaulichungen erfordert, die auch zur Idee des unendlich Kleinen führen. Zeit braucht dynamische Software, die man vielleicht einsetzt, um anschaulich einen Grenzwert nahezulegen. Und Zeit brauchen der abstrakte Grenzwertformalismus, die formalen und einzuübenden Schreibweisen und, wenn man sie denn versucht zu führen, die Beweise der Grenzwertsätze und Differentiationsregeln. Sie ersticken quasi im Formalismus. Von all dem kann man sich befreien und die „verlorene" Zeit einsparen, indem man unendliche Grenzprozesse anschaulich in infinitesimale Verhältnisse münden lässt, diese in hyperreelle Zahlen übersetzt und Differentiationsregeln ausrechnet (s. Abschnitt 2.1, S. 15). Grenzwertsätze entfallen.

Grenzwerte und das unendlich Kleine, besser: die reellen Teile hyperreeller Zahlen, liegen nicht so weit auseinander, wie man denkt. Es sei an Weierstraß und Cauchy erinnert, Väter der Grenzwerte, die lange beides zugleich dachten (s. Abschnitt 8.3 in (Elemente 21)). Infinitesimalien und Grenzwerte waren historisch lange Zeit miteinander verbunden. Viele Formulierungen historischer Mathematiker erinnern an die propädeutisch formulierten Grenzwerte im heutigen Unterricht. Wir können nicht erwarten, dass heutige Schüler, anders als ihre Vorfahren, Infinitesimalien und Grenzwerte gleich begrifflich scharf trennen können. Mathematische Logik und Mengenlehre gab es damals in der Mathematik nicht und gibt es heute in der Schulmathematik nicht. Eine klare Unterscheidung in der Schule ist daher gar nicht möglich. Man muss und kann, und das ist eine **Chance**, mit beidem rechnen – im doppelten Sinne.

Es ist für uns Lehrende eine gewisse Herausforderung, sich auf die neuen Dinge einzulassen. Es kann aber auch reizvoll sein, den infinitesimalen Weg auszuprobieren – mit Grenzwerten oder auch ohne sie. Es können interessante Unterrichtsphasen entstehen, wenn man infinitesimale und Grenzwertdenk- und -schreibweisen nebeneinander stellt, beide anwendet und diskutiert. Man muss bereit sein, die gewohnten propädeutischen Grenzwertpfade zu verlassen, wenn die Schülerinnen und Schüler zum Infinitesimalen tendieren. Man muss über einen Schatten springen, so wie es auch die Kolleginnen und Kollegen empfanden, die den Unterrichtsversuch gewagt haben und jetzt Autorinnen und Autoren dieser Handreichung sind. Am Ende eines Berichts lesen wir: „Es lohnt – und man lernt immer noch selbst dazu.“ (Fuhrmann/Hahn (2019))

Es gibt noch eine sehr andere Herausforderung, die die Schüler nicht, aber wieder uns trifft. Wir bemerken nämlich, dass unser mathematisches Wissen mit *Glaubenssätzen* durchsetzt ist. Der erste Satz, der hierher gehört, ist: Grenzwerte sind alternativlos. Der Unterricht, den wir vorgestellt haben, zeigt das Gegenteil. Er hebt zudem wie von selbst den alltäglichen mathematischen Glaubenssatz auf: $\mathbb{R}$ ist die Zahlengerade. Was ist mit den Punkten? Sie werden Monaden. Das sind Mengen von Punkten. Ein Punkt eine Menge von Punkten? Darüber kann man nachsinnen, und das geschieht in (Bedürftig (2015)). Man beginnt, Mathematik anders zu denken.

Mit der Aufhebung der Identifikation von Punkten und reellen Zahlen schwimmen uns manche Gewohnheiten davon, an erster Stelle die gewöhnliche Einführung der reellen Zahlen, die wir vielleicht nicht so offen, aber doch mit ähnlichen Vorstellungen wie die Autoren des Lehrerausbildungslehrbuchs (Padberg (2010), S. 159) vornehmen: „Die reellen Zahlen werden also gleich zu Beginn durch die Gesamtheit **aller** Punkte der Zahlengeraden erklärt und als gegeben angesehen.“ (Fettdruck original im Lehrbuch) Alle Punkte? Es gibt jetzt auch hyperreelle Punkte. Überhaupt löst sich die Punktvorstellung des linearen Kontinuums, der Geraden, auf (Bedürftig 2021).

Schlusswort

Worum geht es?

- Es geht um eine *tragfähige* Basis für die Analysis in der Schule.

  Die notwendig propädeutischen Grenzwerte und ein abstrakter Limesformalismus können sie *nicht* bieten.

  Infinitesimale und infinite Zahlen *können* dies.

  Dazu braucht es eine *Zahlbereichserweiterung*, die Erweiterung der reellen Arithmetik zu den hyperreellen Zahlen.

  Die Arithmetik der hyperreellen Zahlen kann mit Schülerinnen und Schülern *gemeinsam* entwickelt werden.

  Theorie und Anwendungen, gemeinsam entwickelt, sind *nachhaltig*.

Wir haben einen Unterrichtsgang vorgestellt. Didaktische und methodische Ideen und Argumente haben wir vorgetragen. Wir laden ein zur Diskussion und zum Experiment.

Kapitel 5

Richtlinien, Aufgaben, Abitur

5.1 Über den Rechenweg zu e in 3.4 [*Ba*]

Im Punkt 3.) in 3.4 haben wir e, wie man es oft tut, als reelle Basis derjenigen Exponentialfunktion festgelegt, deren Ableitung mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Welche Zahl ist das? Die vorläufige Bestimmung von e in 3.4 wollen wir jetzt diskutieren. Schließlich beziehen wir uns auf den Abschnitt 11.3 in (Elemente 21).

Wie waren wir in 3.4 vorgegangen? Wir waren – die Differenzierbarkeit (Abschnitt 11.3 in (Elemente 21), Antwort zur Frage 3) voraussetzend – ausgegangen von

$$\exp_e'(x) \simeq \frac{e^{x+\alpha} - e^x}{\alpha} = e^x \cdot \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$$

mit infinitesimalem α. Soll die Ableitung $\exp_e'(x) = (e^x)'$ die Ausgangsfunktion e^x sein, ist Bedingung, dass

(1) $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \simeq 1$.

Umformungen von (1) hatten uns zur Definition $\mathrm{e} := \mathrm{rt}\left((1 + \frac{1}{\Omega})^\Omega\right)$ geführt. Erfüllt dieses e wirklich die Bedingung (1)? Die Frage ist berechtigt. Denn die Umformungen in 3.4 waren Umformungen von $\simeq$-Beziehungen gewesen, die mit Vorsicht vorzunehmen sind, da infinitesimale Nachbarschaften, z.B. beim Potenzieren, verloren gehen können.

Gleichungsumformungen sind im Hyperreellen so wie im Reellen, da ${}^*\mathbb{R}$ ein Modell der reellen Arithmetik ist. Wir gehen daher die Umformungsschritte in 3.4 noch einmal in Gleichungsform durch, d.h. wir fragen, welche hyperreelle Zahl δ die Gleichung

(2) $\frac{\delta^\alpha - 1}{\alpha} = 1$,

erfüllt. Wir formen um:

(3) $\delta^\alpha = 1 + \alpha\,,$

(4) $\delta = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\,.$

Wählen wir $\alpha = \frac{1}{\Omega}$, erhalten wir $\delta = (1 + \frac{1}{\Omega})^\Omega$. Damit ist

(5) $\delta \simeq e$.

Diese infinitesimale Nachbarschaft aber können wir jetzt nicht ohne weiteres – wegen der eben genannten Sensibilität von $\simeq$ – von (4) bis (2) zurückverfolgen. Dazu gehört eine spezielle Argumentation. Sie finden wir in der Antwort auf die Frage 4 im Abschnitt 11.3 in (Elemente 21). Hier wird gezeigt, dass aus $\delta \simeq e$ folgt, dass

$$1 = \frac{\delta^\alpha - 1}{\alpha} \simeq \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$$

ist.

Damit ist das Ziel erreicht: Die reelle Zahl e ist die Basis, für die $\exp_e'(x) \simeq \frac{e^{x+\alpha} - e^x}{\alpha} \simeq e^x$ gilt. Im Reellen also ist:

$$\exp_e'(x) = e^x\,.$$

5.2 Lehrplanvorgaben der Bundesländer [*Ba*]

Immer wieder fragen Lehrerinnen und Lehrer, die die Vorzüge der Nichtstandardanalysis erkannt haben und auf diese Weise nun unterrichten wollen, ob dies denn die Rahmenlehrpläne zulassen. Nach dem aktuellen Stand kann diese Frage positiv beantwortet werden.

Vor einigen Jahren war die Situation noch eine andere. Zum Beispiel sah der Berliner Rahmenplan Mathematik für die 11. Klasse (Einführungsphase) vor mehr als zehn Jahren noch allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte“ 15 Unterrichtsstunden vor und verlangte: „Für einfache konvergente Zahlenfolgen den Grenzwert erkennen und durch Anwendung der Grenzwertdefinition nachweisen können, daß die erkannte Zahl tatsächlich der Grenzwert ist.“[1] Dieses Thema wurde im Zuge der Schulzeitverkürzung deutlich zusammengestrichen. Heute verlangt der Lehrplan einen „propädeutischen Grenzwertbegriff“, beschreibt aber nicht, was damit gemeint sein soll. Inzwischen verlangen Abituraufgaben für Grundkurse häufig nur noch drei Probeeinsetzungen als Nachweis für Konvergenz. Dies als Analysis und damit als Mathematik zu bezeichnen, ist zumindest fragwürdig.

[1] An dieser Formulierung wird eine andere grundsätzliche Problematik der Standardanalysis deutlich: Man muss den Grenzwert kennen, um nachzuweisen, dass er es wirklich ist. Aber wie findet man den Grenzwert heraus?

Auch in den anderen Bundesländern ist die Situation ähnlich. Viele Lehrpläne verlangen ebenfalls einen „propädeutischen Grenzwertbegriff", andere weisen andere Formulierungen auf. Gemeinsam ist allen, dass eine exakte Grenzwertdefinition nicht mehr verlangt wird. Die Nichtstandardanalysis dagegen geht rechnerisch vor, ist damit mathematisch exakt und zudem anschaulich. Diese Vorzüge sind unübersehbar.

Die folgenden Abschnitte zitieren aus den entsprechenden Abschnitten der Mathematiklehrpläne der sechzehn Bundesländer, insbesondere Stellen, die auf Grenzwerte eingehen. Weiterhin fällt auf, dass in einigen dieser Vorgaben auch von Infinitesimalien die Rede ist.

Baden-Württemberg
Im „Bildungsplan des Gymnasiums" vom 23. März 2016 heißt es für die Klassen 9/10 unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang":

Vorbemerkungen: ... Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem propädeutischen Grenzwertbegriff, sie beschreiben und interpretieren das Änderungsverhalten von Größen analytisch. ...

Bei den Lernzielen steht:

Die Schülerinnen und Schüler können ...
(13) die mittlere Änderungsrate einer Funktion auf einem Intervall (Differenzenquotient) bestimmen und auch als Sekantensteigung interpretieren,
(14) die momentane Änderungsrate als Ableitung an einer Stelle aus der mittleren Änderungsrate durch Grenzwertüberlegungen bestimmen,
(15) die Ableitung an einer Stelle als Tangentensteigung interpretieren ...

Exakte Grenzwert-Mathematik wird somit nicht verlangt. Es ist also durchaus zweckmäßig, den Grenzwert als reellen Teil (Standardteil) zu errechnen.

Bayern
Auf der Seite
$http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html$, abgerufen am 6. November 2020, steht unter „M 11.1.2 Lokales Differenzieren (ca. 9 Std.)":

Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. ...

Und unter „M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung" findet man:

Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integration ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten.

Auch hier wird das zum Grenzwert eigentlich gehörende ε-δ-Verfahren nicht verlangt.

Berlin

Im „Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, 1. Auflage 2006“ wird für Grund- und Leistungskurs inhaltlich folgendes vorgegeben:

4.1 Analysis

(a) Differenzialrechnung

... inhaltlich-anschaulicher Grenzwertbegriff ...

Unter „Kompetenzerwerb im Themenfeld“ steht:

Im Grundkursfach bleibt diese Orientierung an Realsituationen durchgehendes Prinzip. Die Methoden der Infinitesimalrechnung werden weiterentwickelt, um z. B. Extremalprobleme in einfachen Anwendungen lösen zu können. Argumentationen werden hier immer auch inhaltlich geführt.

Im Leistungskursfach wird zusätzlich eine strengere Absicherung mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Regeln angestrebt, indem Beispiele und Gegenbeispiele für verschiedene Phänomene (z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) untersucht und systematisiert werden. Außerdem werden hier auch verstärkt Zusammenhänge aus rein innermathematischer Perspektive untersucht (z. B. geometrische Probleme, Kriterien für Extrema und Wendestellen).

Und weiter:

(b) Integralrechnung

Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten in Anwendungssituationen (z. B. Wasserstand, zurückgelegter Weg) – als diskrete Modellierung und als anschaulicher Grenzprozess, Flächenbestimmung als Grenzprozess einer Ausschöpfung mit infinitesimalen Flächenstücken (z. B. durch Unter- und Obersummen). ...

Unter „Kompetenzerwerb im Themenfeld Integralrechnung“ findet man:

... Eine qualitative Rekonstruktion bzw. eine numerische Ausschöpfung ist dann die Grundlage für eine Präzisierung und inhaltliche Diskussion des zugrunde liegenden Grenzprozesses. Die Beschäftigung mit Grundproblemen der Integralrechnung ist also zunächst eine modellierende. Erst auf der Grundlage dieser Erfahrungen kann algebraisch erkundet werden, wie als Terme gegebene Funktionen zu integrieren sind.

Der Grundgedanke der Verknüpfung von Differenzial- und Integralrechnung im Hauptsatz wird ebenfalls an anschaulichen Beispielen plausibel. Hierzu dienen auch diskrete Modelle, an denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig argumentieren können. Im Grundkursfach werden die Integration und Differenziation in vielfältigen einfachen Anwendungskontexten vertieft. Neue Funktionsklassen werden nur hinzugezogen, sofern sie als Modelle für diese Kontexte dienen.

Im Leistungskursfach wird der Hauptsatz geometrisch-anschaulich bewiesen. Die Integration weiterer konkreter Funktionen und allgemeiner Funktionsklassen wird in enger Verknüpfung mit den Ableitungsregeln erarbeitet und bietet Gelegenheiten zum Problemlösen. Verschiedene andere Ausschöpfungsprozesse vertiefen das Verständnis für die Grundidee des Integrierens.

Diese Formulierungen lassen das Rechnen mit hyperreellen Zahlen zu.

Brandenburg
Im „Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg“, gültig ab 1. August 2018, findet man folgende Formulierungen gleich an mehreren Stellen.

Unter „inhaltsbezogenen Kompetenzen“ wird für Grund- und Leistungskurs angegeben:
– Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitungen nutzen, . . .

Unter „Inhalte“ wird dann präzisiert:
– Grenzwertverhalten von Funktionsgraphen ($x \to \infty$; $x \to x_0$)
– Schreibweise lim *ohne formale Definition*
– Ableitung einer Funktion mittels Differentialquotienten

Auch beim Thema „Integralrechnung“ wird entsprechend formuliert:
Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung des Integrals nutzen,
näherungsweises Bestimmen von Flächeninhalten unter Funktionsgraphen mittels Ober- und Untersummen, bestimmtes Integral als gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme.

Der Begriff „infinitesimal“ fällt an mehreren Stellen. So steht unter der „Leitidee Algorithmus und Zahl [L1]“:
Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden.

Dann bei der „Leitidee Messen [L2]“:
Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden.

Und schließlich bei der „Leitidee Funktionaler Zusammenhang [L4]“:
Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Auch im Land Brandenburg ist es also möglich, die Analysis mit Infinitesimalien zu unterrichten.

Bremen
Im „Mathematik-Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe – Qualifikationsphase – “, Stand 2008, wurde nach den Begriffen „Grenzwert“ und „Infinitesimalien“ gesucht. Beide Begriffe tauchen dort weder direkt noch in abgewandelter Form beim Thema Analysis auf.

Somit kann man davon ausgehen, dass Analysis mit infinitesimalen Zahlen unterrichtet werden kann.

Hamburg
In diesem Bundesland hat jede Lehrerin und jeder Lehrer die Möglichkeit, Nichstandardanalysis zu unterrichten, denn im „Bildungsplan gymnasiale

Oberstufe Mathematik“ der Stadt Hamburg aus dem Jahre 2009 findet man lediglich:
Die Schülerinnen und Schüler
... bestimmen Grenzwerte auf anschaulicher Ebene, ...

Hessen
Im hessischen „Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe MATHEMATIK“ bezieht man sich „unter Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte“ auf die Begründer der Analysis, denn dort steht:
... Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten ist das Kernstück der infinitesimalen Sichtweise auf Veränderungsprozesse, die auf Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht. Dafür benötigen die Lernenden einen propädeutischen Grenzwertbegriff, d. h. adäquate und ausbaufähige Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten, die sie durch die Untersuchung von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen entwickeln können. ...

Zwei Seiten dahinter konkretisiert man das und schreibt:
... Ableitung einer Funktion an einer Stelle:
Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs (Aufbau adäquater Vorstellungen z. B. durch Untersuchen von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen; eine formale Beschreibung von Grenzwerten mit Quantoren ist nicht erforderlich) ...

Entsprechende Formulierungen finden sich auch beim Thema Integralrechnung. An anderer Stelle findet man:
Die Leitidee [Algorithmus und Zahl (L1), d. Verf.] erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden.

Damit ist auch die Verwendung infinitesimaler Zahlen eingeschlossen.

Mecklenburg-Vorpommern
Im „Rahmenplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe, Mathematik, 2019“ für dieses Bundesland steht bei den Unterrichtsinhalten unter „Verbindliche Inhalte“:
Grenzwerte von Funktionen [MD3]
– anschaulicher Grenzwertbegriff
– Verhalten im Unendlichen

Die Vorgaben sind so offen gehalten, dass Grenzwerte mit den Methoden der Nichtstandardanalysis ermittelt werden können.

Niedersachsen
In den „Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, gymnasiale Oberstufe Mathematik“, heruntergeladen am 6. November 2020, steht als „Unterrichtsinhalte der Vorstufe“:
Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts im 11. Schuljahrgang steht das Tangentenproblem. Der Ableitungsbegriff kann mit Hilfe von „Folgen“ oder mittels „stetiger Ergänzung“

erfaßt werden. Dabei ist der „Grenzwert“ als der grundlegende Begriff der Analysis zu erarbeiten. Die Definition des Grenzwertes muß soweit präzisiert werden, daß sie für den Analysisunterricht in der Kursstufe tragfähig ist. Eine Verbindung zu den propädeutischen Grenzwertbetrachtungen aus den Schuljahrgängen 7 bis 10 ist herzustellen.

Für die „Kursstufe Analysis“ wird verlangt:

Schwerpunkte des Analysisunterrichts in der Kursstufe sind
– Vertiefung und Erweiterung der Begriffe und Verfahren aus der Vorstufe zur Untersuchung weiterer Funktionen
– das Flächeninhaltsproblem
– die Reflexion infinitesimaler Prozesse.

Auch hier wird vom Infinitesimalen gesprochen, worauf sich Lehrerinnen und Lehrer beziehen können, wenn sie Nichtstandardanalysis unterrichten.

Nordrhein-Westfalen

Dieses Bundesland formuliert im „Kernlehrplan für die Sekundarstufe II, Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik“ folgende „KOMPETENZERWARTUNGEN“ bis zum Ende der Einführungsphase:

Die Schülerinnen und Schüler …
– berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext,
– erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate,
– deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten,
– deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung,
– beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
– leiten Funktionen graphisch ab,
…

„Bis zum Ende der Qualifikationsphase (Grundkurs und Leistungskurs)“ wird erwartet:

Die Schülerinnen und Schüler …
erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, …

Damit ist auch hier die Arbeit mit Infinitesimalien im Unterricht eingeschlossen.

Rheinland-Pfalz

Im „LEHRPLAN MATHEMATIK Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe)“ formuliert man die „Anpassung an die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife, Stand März 2015“ und präzisiert

Die fachlichen Kompetenzen:…
1.03g: Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesonde-

re bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen ... .

Als Unterrichtsziele für den Grundkurs findet man:

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen und auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs zu nutzen.

Über Grenzwerte wird geschrieben:

Der Zugang zum Grenzwertbegriff über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse können auch historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden.

Man soll sich also durchaus mit dem Unendlichen beschäftigen.

Unter „Ziele, Inhalte“ heißt es, die Schüler sollen

den Begriff „Grenzwert einer Folge“ verstehen. Dazu folgen

Hinweise:

Der Begriff „Grenzwert“ soll exemplarisch an Zahlenfolgen erfahren werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine inhaltliche Vorstellung davon gewinnen, was in der Mathematik unter einem Grenzwert verstanden wird. Der Begriff kann auf unterschiedlichen Niveaustufen erschlossen werden. Im Grundkurs genügt eine an der Definition orientierte verbale Beschreibung; auf eine Formalisierung ($\varepsilon - n_0$-Fassung) sollte verzichtet werden.

Für den Leistungskurs formuliert man folgendes Ziel:

Grenzwerte

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Für die Differentialrechnung beschreibt man u.a. folgende Möglichkeiten:

Die Ableitung kann als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden. Gleichwertig sind Zugänge über Linearisierung und Änderungsraten möglich.

Die infinite Streckung eines Funktionsgraphen ist als Linearisierung zu verstehen. Man geht auch auf mögliche „Beiträge der Fächer Physik / Astronomie“ ein:

Probleme mit den Begriffen „unendlich kleine Größen“ und „unbegrenzte Teilbarkeit“; Singularitäten

Beschreibung physikalischer Gesetze mit Hilfe der Infinitesimalrechnung.

Schließlich schreibt man unter

Weiterführung der Differential- und Integralrechnung:

In diesem Abschnitt werden weitere Ableitungs- und Integrationsregeln bereitgestellt und *die Methoden der Infinitesimalrechnung auf ein erweitertes Funktionenmaterial angewendet.*

Saarland
Im „Lehrplan Mathematik Gymnasiale Oberstufe Einführungsphase – Erprobungsphase – 2014" wird zunächst im „Didaktischen Vorwort ..." formuliert:
Der Lernbereich Stetigkeit verbindet sodann die Funktionenlehre und die Geometrie mit Anfängen der Differentialrechnung. Die Untersuchung des Grenzwertverhaltens bei infinitesimalen Prozessen ist gekennzeichnet durch zunehmende Abstraktion und markiert den Übergang zur Mathematik der Sekundarstufe II.

Dazu gibt man
methodische und fachdidaktische Erläuterungen:
Die Grenzwertbegriffe für Folgen und Funktionen werden nicht definiert, sondern nur veranschaulicht.
Im Vordergrund steht eine anschauliche Erarbeitung der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit mit dem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erfassen.

Zum Thema „Stetigkeit" verlangt man
verbindliches Fachwissen:
Bezeichnung: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen x_0, wenn die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe bei g liegen, falls die x-Werte nur hinreichend nahe bei x_0 liegen.
Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g.$

Unter „Verbindliche Kompetenzschwerpunkte" schreibt man dazu:
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen das Verhalten einer Funktion f, indem sie die x-Werte einer vorgegebene Zahl x_0 annähern und die zugehörigen Funktionswerte berechnen, auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation.

Damit kann Nonstandardanalysis unterrichtet werden.

Sachsen
Im sächsischen „Lehrplan Gymnasium Mathematik 2004/2009/2011/2013 /2019" verlangt man in
Klasse 10:
Kennen von Zahlenfolgen als spezielle Funktionen
– explizite und rekursive Bildungsvorschriften
– Schranke, Grenzwert

und empfiehlt dazu das
Nutzen von CAS zum Nachweis der Eigenschaften
anschauliches Gewinnen des Grenzwertbegriffs.

Schließlich heißt es für
Klasse 11/12:
grundlegende Kompetenz (im Grund- und im Leistungskurs):

Die Schüler gewinnen inhaltliches Verständnis von den Begriffen Grenzwert, erste Ableitung und bestimmtes Integral.

Auch in Sachsen können diese Anforderungen mit den Methoden der Nichtstandardanalysis erfüllt werden.

Sachsen-Anhalt

Im „Fachlehrplan Gymnasium/Berufliches Gymnasium, Stand: 01.07.2019, Mathematik" steht für die Schuljahrgänge 11/12 unter

Kompetenzschwerpunkt: Grundlagen der Infinitesimalrechnung:

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen:

– Grenzwerte von Funktionen ermitteln.

Für ein „Erhöhtes Anforderungsniveau" verlangt man sogar,

– Grenzwerte von Funktionen rechnerisch [zu] ermitteln.

An verschiedenen Stellen wird auf die Infinitesimalrechnung verwiesen:

– sachgerechtes Arbeiten mit Symboliken der Infinitesimalrechnung

Notationsformen der Infinitesimalrechnung verstehen und anwenden

Der Unterricht in der Qualifikationsphase eröffnet durch das Kalkül der Infinitesimalrechnung die Betrachtung von Änderungsraten und Extremaleigenschaften.

In diesem Lehrplan gibt es für die Analysis sogar einen Kompetenzschwerpunkt „Grundlagen der Infinitesimalrechnung". Damit sollte niemand gehindert sein, mit den Mitteln der Nichtstandardanalysis den Unterricht zu gestalten.

Schleswig-Holstein

In diesem Bundesland gibt es die „Fachanforderungen Mathematik Allgemein bildende Schulen, Sekundarstufe I/Sekundarstufe II".

Darin findet man Stichworte wie

– ... nutzen Grenzwerte zur Bestimmung von Ableitungen und Integralen,

– Grenzwerte von Folgen von Funktionswerten reeller Funktionen

– Limes

und schreibt erläuternd:

Es reicht die intuitive Erfassung des Grenzwertbegriffes. Die Schreibweise „lim" kann auch ohne formale Definition verwendet werden.

Zum Kernthema der Analysis steht geschrieben:

Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten sollte durch Grenzwertprozesse intuitiv erfasst und mit dem DGS (Dynamisches Geometriesystem) veranschaulicht werden. Auch mithilfe der Tabellenkalkulation kann das Verständnis des Grenzwertprozesses unterstützt werden. Dabei sollten links-, rechts- und beidseitige Grenzwertprozesse betrachtet werden.

Folgendes kann man sogar als Hinweis auf die Nichtstandardanalysis verstehen: *In der Oberstufe werden die in der Sekundarstufe I vermittelten Kenntnisse über Funktionen und ihre Eigenschaften vertieft und insbesondere um die infinitesimalen Methoden der Differenzial- und Integralrechnung erweitert.*

Thüringen
Vom „Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur“ gibt es aus zwei Jahren Mathematiklehrpläne, nämlich den „Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife, Mathematik 2013“ und mit demselben Titel für 2018. Letzterer in Kraft gesetzt zum Schuljahr 2019/20 für Schüler der Klassenstufen 5 - 11. Darin steht für die Klassenstufe 10 und 11:
Der Schüler kann …
…den Grenzwertbegriff aus der Anschauung heraus erklären und die Grenzwertschreibweise $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ *bzw.* $\lim\limits_{x\to x_0}$ *verwenden, um den Verlauf von Graphen (auch unter Berücksichtigung waagerechter und senkrechter Asymptoten) zu beschreiben, …*

Weitere Festlegungen zu den Themen „Grenzwert“ oder „Infinitesimalien“ gibt es nicht, so dass auch in Thüringen Nichtstandardanalysis unterrichtet werden kann.

5.3 Aufgabensammlung [*F*]

In diesem Abschnitt werden exemplarisch Aufgaben mit Lösungen vorgestellt, wie sie in gängigen Schulbüchern und eventuell auch in ähnlicher Weise in zentral gestellten Abituraufgaben vorkommen können. Dabei werden die Unterschiede bei den Lösungen in Standard- und Nichtstandardform deutlich gegenübergestellt. Zudem wird nachgewiesen, dass Nichtstandardanalysis den Lehrplänen und Richtlinien der einzelnen Bundesländer nicht widerspricht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} \ .$$

1. (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion von f durch. Gib auch die Wertemenge von f an.
   (b) Zeichne den Graphen von f (1LE = 2cm).
2. In den Graphen von f soll ein rechtwinkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt eingezeichnet werden, wobei ein Punkt im Ursprung, ein zweiter auf der positiven x- Achse und der dritte mit der gleichen x-Koordinate wie der zweite auf dem Graphen liegen.

   Bestimme diesen maximalen Inhalt A_{max}.
3. Welchen Inhalt hat das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück, das der Graph von f und die x-Achse einschließen?

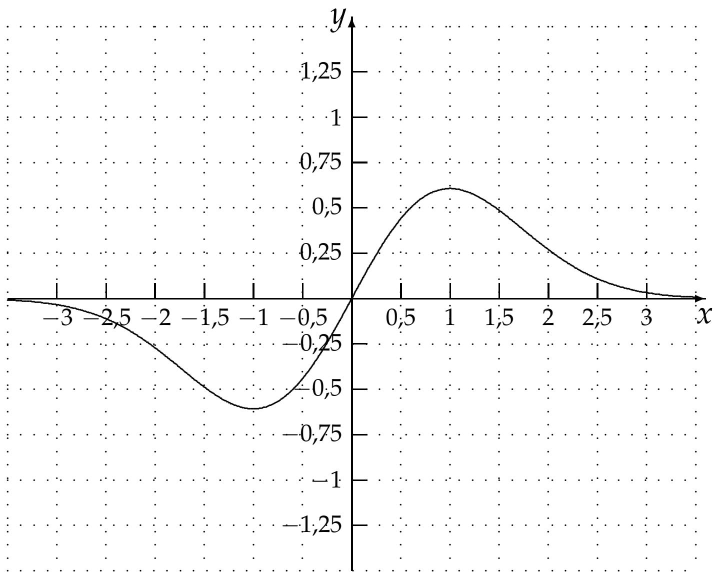
Lösungen:

1. (a) Maximale Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}$;
Punktsymmetrie wegen $f(-x) = -f(x)$;
Nullstelle $x_N = 0 \Longrightarrow N(0\,;\,0)$;
$f'(x) = (1 - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$ und $f''(x) = x \cdot (x^2 - 3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$;
Extrema: $x_{E_{1/2}} = \pm 1$, $f(x_{E_{1/2}}) = \pm \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x_{E_1}) < 0$, $f''(x_{E_2}) > 0$,
also Hochpunkt $H(1\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ und Tiefpunkt $T(-1\,;\,-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$;
Wendepunkte: $W_1(0\,;\,0)$, $W_{2/3}(\pm\sqrt{3}\,;\,\pm\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$;
Verhalten im Unendlichen:

Standard	**Nichtstandard**
Für große Werte von $\lvert x \rvert$ dominieren die Werte $\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$ der e-Funktion gegenüber dem linearen Faktor x (vgl. Abschnitt 3.8).	Für infinite x dominieren die Werte $\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$ der e-Funktion gegenüber dem linearen Faktor x.
Daher gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} = 0$, und die x-Achse ist Asymptote des Graphen von f.	Daher gilt $\pm\Gamma \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} \simeq 0$, und die x-Achse ist Asymptote des Graphen von f.

Wertemenge: $W = [-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}]$;

(b) Graph:



2. Die drei Punkte seien $P(0\,;\,0)$, $Q(u\,;\,0)$ und $R(u\,;\,f(u))$ mit $u > 0$.

Dann gilt für den Flächeninhalt $A(u) = \frac{1}{2}u^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}$.

Mit Produkt- und Kettenregel sowie Ausklammern ergibt sich für $A'(u)$:

$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot (2 - u^2)$. Wegen $u > 0$ gilt $A'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}$.

Standard	Nichtstandard
Da $\lim\limits_{u \to 0} A(u) = \lim\limits_{u \to \infty} A(u) = 0$, …	Da $A(\alpha) \simeq 0$ und $A(\Gamma) \simeq 0, \ldots$

…ergibt sich für

$u = \sqrt{2}$ maximaler Flächeninhalt $A_{\max}$ mit $A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3. Die Substitution $z := \mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$ liefert $z'(x) = \frac{dz}{dx} = -x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} \ldots$

   (**Anmerkung:** Dieser in der Standard-Mathematik übliche Umformungsschritt ist eigentlich dort nicht erlaubt, denn nur in der Nichtstandard-Mathematik darf mit den auftretenden Infinitesimalien gerechnet werden (vgl. Abschnitt 11.2 in (Elemente 21).)

   …und damit

   $\int f(x)dx = \int x \cdot z \frac{dz}{-x \cdot z} = -\int dz = -z + C = -\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} + C.$

Standard	Nichtstandard
Der besagte Flächeninhalt von A beträgt $A = 2 \cdot \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_0^a x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} dx$ $= 2 \cdot \lim\limits_{a \to \infty} [-\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}]_0^a$ $= 2 \cdot (0 - (-1)) = 2$	Der Wert des Flächeninhalts A beträgt $A \simeq 2 \cdot \int\limits_0^\Gamma x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} dx$ $= 2 \cdot [-\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}]_0^\Gamma$ $\simeq 2(0 - (-1)) = 2$

Aufgabe 2

Für $t \neq 0$ sei eine Funktionenschar gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{2x}{t \cdot \mathrm{e}^{-tx}} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

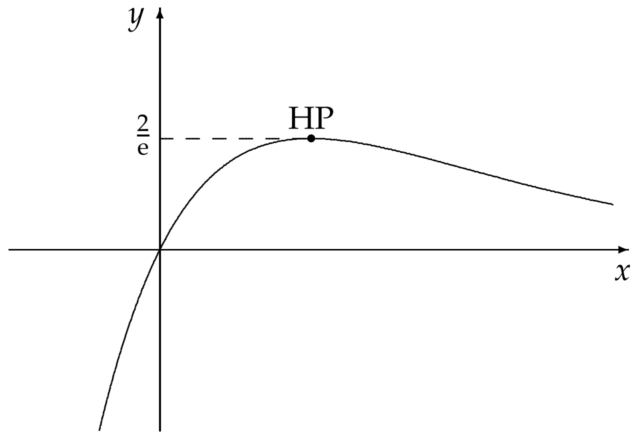
Das Schaubild von f_t sei K_t.

1. (a)

Standard	Nichtstandard
Untersuche das Verhalten von f_t für $x \longrightarrow \infty$. Fallunterscheidung!	Wie verhält sich f_t im Infiniten? Fallunterscheidung!

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen von f_t und f_{-t}? Nachweis!

(b) Das Bild zeigt einen der Graphen von K_t. Bestimme einen passenden Wert des Parameters t.



2. Für $x > 0$ beschreibt die Kurve der Funktion f_1 den Dickenzuwachs (in m) von Eichenbäumen (x: Alter des Baums in Jahren).

Berechne das Integral $\int\limits_0^b f_1(x)dx$ und interpretiere diesen Wert im Sachzusammenhang „Eichenwachstum".

(Lösungshinweis: $F_1(x) = -2e^{-x}(x+1)$)

Wie dick kann nach dieser Funktion eine Eiche werden?

Lösungen:

1. (a) Zunächst muss berücksichtigt werden, dass bei ...

Standard	**Nichtstandard**
... Grenzwerten wie $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ ...	... unbestimmten Ausdrüken wie $\frac{\text{infinitesimal}}{\text{infinitesimal}}$ bzw. $\frac{\text{infinit}}{\text{infinit}}$ ...

... die Exponentialfunktion gegenüber der Potenzfunktion dominiert (vgl. Abschnitt 3.8). Außerdem ist das Vorzeichen von t für ...

Standard	**Nichtstandard**
... den Grenzwert ...	... das Verhalten ...

... entscheidend, so dass eine Fallunterscheidung nötig ist:

Standard	**Nichtstandard**
$t>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{t\cdot e^{tx}} = 0$	$t>0$: $f_t(\Gamma) = \frac{2\Gamma}{t\cdot e^{t\Gamma}} \simeq 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{t\cdot e^{tx}} = -\infty$	$f_t(-\Gamma) = \frac{-2\Gamma}{t\cdot e^{-t\Gamma}}$ ist negativ infinit.
$t<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{t\cdot e^{tx}} = -\infty$	$t<0$: $f_t(\Gamma) = \frac{2\Gamma}{t\cdot e^{t\Gamma}}$ ist negativ infinit
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{t\cdot e^{tx}} = 0$	$f_t(-\Gamma) = \frac{-2\Gamma}{t\cdot e^{-t\Gamma}} \simeq 0$

Es ist $f_{-t}(x) = \frac{2x}{-t\cdot e^{-tx}} = \frac{2\cdot(-x)}{t\cdot e^{t\cdot(-x)}} = f_t(-x)$.
Also entsteht der Graph von f_{-t} aus dem Graphen von f_t durch Spiegelung an der y-Achse.

(b) Es ist $f_t'(x) = \frac{2}{t}\cdot e^{-tx} + \frac{2x}{t}\cdot(-t)\cdot e^{-tx} = \frac{2}{t}\cdot e^{-tx}(1-tx)$. Einzige Extremstelle von f_t ist demnach $x_E = \frac{1}{t}$. Der zugehörige Funktionswert ist $f_t(\frac{1}{t}) = \frac{2}{t^2}\cdot e^{-1}$.
Durch Vergleich mit dem Funktionswert des Hochpunkts im vorgegebenen Graphen folgt $t=1$.

2. $\int\limits_0^b f_1(x)dx = \int\limits_0^b 2xe^{-x}dx$. Mit $v' = e^{-x}$ und $u = 2x$ ergibt sich $v = -e^{-x}$ und $u' = 2$. Mittels partieller Integration folgt dann
$\int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - \int -2e^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -2e^{-x}(x+1) + C.$
Also: $\int\limits_0^b f_1(x)dx = -2e^{-b}(b+1) - (-2(0+1)) = 2 - 2e^{-b}(b+1)$.
Dieser Term beschreibt die Dicke einer Eiche nach b Jahren.

Standard	**Nichtstandard**
Da er für $b\to\infty$ gegen 2 strebt, …	Da $(2-2e^{-\Gamma}(\Gamma+1)) \simeq 2-0 = 2, \ldots$

… kann eine Eiche demnach bis zu 2m dick werden.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktionsschar f_t für $t>0$ mit $f_t(x) = \frac{1}{t}\cdot x + \frac{t}{x-t}$, $x \neq t$. Der zugehörige Graph heiße K_t.

1. (a) Zeige: $f_t''(x) = \frac{2t}{(x-t)^3}$

(b) Untersuche K_t auf Achsenschnittpunkte, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten.

(c) Zeichne unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen K_2 für $-2 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1cm).

2. (a) Berechne die gemeinsamen Punkte von K_1 und K_2.

   (b) Welcher der Punkte liegt auf *allen* Kurven K_t?

   (c) Begründe, dass sich in diesem Punkt alle Kurven K_t berühren.

Lösungen:

1. (a) $f_t'(x) = \frac{1}{t} - \frac{1}{(x-t)^2}$

   $f_t''(x) = \frac{t \cdot 2 \cdot (x-t)}{(x-t)^4} = \frac{2t}{(x-t)^3}$

   (b) **Schnittpunkt mit der y-Achse:** $f_t(0) = \frac{1}{t} \cdot 0 + \frac{t}{0-t} = -1$

   $\rightarrow S(0\,;\,-1)$

   Schnittpunkte mit der x-Achse/ Nullstellen: $f_t(x) = 0$,

   d.h. $\frac{1}{t} \cdot x + \frac{t}{x-t} = 0$

   $\Leftrightarrow x(x-t) - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - tx + t^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t^2}}{2}$

   $\rightarrow$ keine Nullstellen

   Extrema: $f_t'(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{t} - \frac{1}{(x-t)^2} = 0$

   $(x-t)^2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xt = 0 \Leftrightarrow x(x-2t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 2t$

   $f_t''(x_1 = \frac{2t}{-t^3} < 0 \quad \Rightarrow H(f\ddot{u}rallet > 0)$

   $f_t''(x_2 = \frac{2t}{(2t-t)^3} = \frac{2t}{t^3} > 0 \quad \Rightarrow T(f\ddot{u}rallet > 0)$

   $f_t(x_1) = -1,$ also $H(0\,;\,-1)$.

   $f_t(x_2) = \frac{2t}{t} + \frac{t}{2t-t} = 2 + 1 = 3,$ also $T(2t\,;\,3)$.

   Wendepunkte: $f_t''(x) = 0$, d.h. $\frac{2t}{(x-t)^3} = 0$

   $2t = 0$ im Widerspruch zu $t > 0$, also keine Wendepunkte.

   Asymptoten:

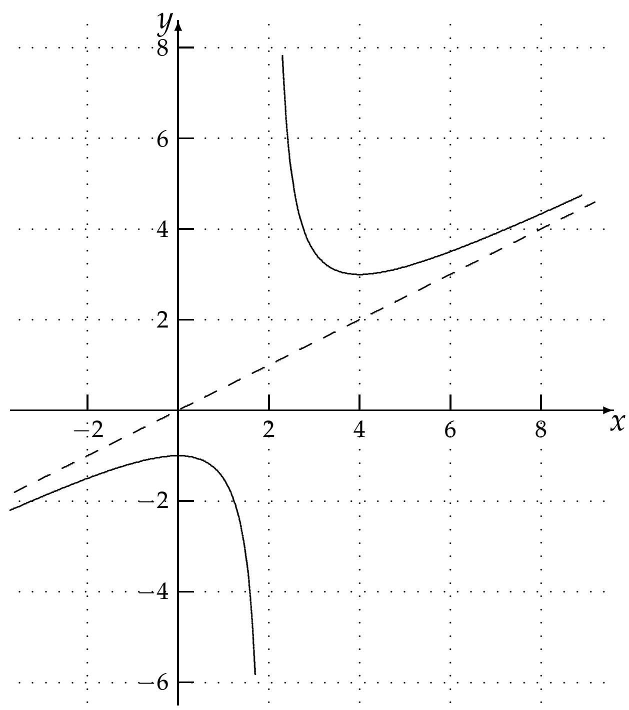
   Senkrechte Asymptote bei $x = t$ (mit Vorzeichenwechsel):

Standard	Nichtstandard
a) Für $x \to t$ mit $x < t$ gilt: $\lim_{x\to t} f_t(x) = \lim_{x\to t} \frac{x}{t} + \lim_{x\to t} \frac{t}{x-t}$ $= 1 + (-\infty) = -\infty$ b) Für $x \to t$ und $x > t$ gilt: $\lim_{x\to t} f_t(x) = \lim_{x\to t} \frac{x}{t} + \lim_{x\to t} \frac{t}{x-t}$ $= 1 + \infty = \infty$	Für infinitesimales $\alpha > 0$ gilt: a) $f_t(t-\alpha) = \frac{t-\alpha}{t} + \frac{t}{-\alpha}$; der erste Summand ist finit, der zweite negativ infinit, die Summe also negativ infinit. b) $f_t(t+\alpha) = \frac{t+\alpha}{t} + \frac{t}{\alpha}$; der erste Summand ist finit, der zweite positiv infinit, die Summe also positiv infinit.

Weitere Asymptote:

Standard	Nichtstandard
Schiefe Asymptote, da $n = m + 1$, (wobei n der Grad des Zählerpolynoms, m der Grad des Nennerpolynoms ist): $y = \frac{1}{t} \cdot x$.	Da $\frac{t}{\Gamma - t} \simeq 0$, ist $f_t(\Gamma) \simeq \frac{1}{t} \cdot \Gamma$. Also besitzt K_t die Asymptote $A_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x$.

(c) Graph:



2. (a) $f_1(x) = x + \dfrac{1}{x-1} \qquad f_2(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x + \dfrac{2}{x-2}$

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x-1} &= \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{x-2} \quad | \cdot (x-1)(x-2)2 \\
2x(x-1)(x-2) + (x-2)2 &= x(x-1)(x-2) + 2(x-1)2 \\
(x^2 - x)(x-2) + 2x - 4 &= 4x - 4 \\
x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4 &= 4x - 4 \\
x^3 - 3x^2 &= 0 \\
x^2(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

$\rightarrow x_{1/2} = 0, x_3 = 3$

$f_1(x_{1/2}) = -1,$ also $P_1(0\,;\,-1)$,

$f_1(x_3) = \dfrac{7}{2},$ also $P_2(3\,;\,\dfrac{7}{2})$.

(b) P_1 liegt auf *allen* Kurven K_t, da P_1 der von t unabhängige Hochpunkt ist!

(c) Da hier *alle* Kurven die gleiche Steigung haben ($f_t'(0) = 0$), berühren sich in diesem Punkt alle Kurven K_t.

Kapitel 6

Literatur und Links

Basiner, S. (2019). *Infinitesimale Größen. Bericht aus dem Unterricht*. Dortmund 2019.
http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, aufgerufen: 2.05.2020.

Baumann, P.; Kirski, T. (2016). *Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Mitteilungen der GDM 100 (2016), 6–16.

Baumann, P.; Bedürftig, T., Fuhrmann, V. (2021). *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard*, Berlin 2021 (erscheint im Herbst)

Bedürftig, T. (2015). *Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Bd. 5, S. 1–21.

Bedürftig, T. (2018). *Über die Grundproblematik der Grenzwerte*, Mathematische Semesterberichte 65/2 (2018), 277–298, https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0.

Bedürftig, T. (2021). *Fliegt der ruhende Pfeil?*, Tagungsband Geschichte der Mathematik 2019 in Mainz, Hrsg. Fischer, H., T. Sauer und Y. Weiss, WTM-Verlag, Münster 2021, S. 30–43.

Behrends, E. (2003). *Analysis I*. Braunschweig/Wiesbaden 2003 (6. Auflage Heidelberg 2015).

Behrends, E. (2004). *Analysis II*. Braunschweig/Wiesbaden 2004.

Dörr, J. (2017). *Analysis mit hyperreellen Zahlen – Unterrichtspraktische Erfahrungen aus einem Leistungskurs*. Speyer 2017, https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien_Unterrichtsversuch_VA_Vallendar_08_09_Juni_2017.pdf, aufgerufen: 2.05.2020.

Fuhrmann, V. und Hahn, C. (2019). *Differentialrechnung ohne Grenzwerte, eine Unterrichtsreihe im Grundkurs, Schuljahr 2018/2019*. Worms 2019.
http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, aufgerufen: 2.05.2020.

Heinsen, S. (2019). *Einführung der Differentialrechnung ohne Grenzwerte - Er-*

fahrungsbericht aus einem Unterrichtsgang in einem (gymnasialen) Grundkurs. Bolanden 2019.
http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, aufgerufen: 2.05.2020.

Kuhlemann, K. (2018a): *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 47–65. Erweitert auf
https://www.karlkuhlemann.net/start/forschung/, aufgerufen: 7.04.2021.

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim; Wien; Zürich 1986.

Lingenberg, W. (2019): *Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Untrricht*. Mitteilungen der GDM 106 (2019), 14–17 und https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/842/837

F. Padberg, R. Danckwerts und M. Stein (2010): *Zahlbereiche*, Heidelberg–Berlin–Oxford 1995 (Nachdruck 2010).

Schmieden, C.; Laugwitz, D. (1958). *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*. Math. Zeitschrift 69, 1–39.

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2007.

6.1 Auswahlbibliographie [*Ka*]

Annotierte Auswahlbibliographie

Manche der folgenden Bücher sind bedauerlicherweise nur noch antiquarisch erhältlich; da sie aber durchaus für Lehrerinnen und Lehrer, die ihre Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung vertiefen und auch um historische und philosophische Aspekte erweitern wollen, empfehlenswert sind, sind sie hier aufgeführt. Verlagsnamen sind in eckigen Klammern angegeben.

1. Baumann, P.; Kirski, T. (2019). *Infinitesimalrechnung – Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Berlin 2019 [Springer Spektrum].

   Hierbei handelt es sich um eine komplette Neuüberarbeitung des folgenden, von den Autoren zusammen mit H. Wunderling verfassten und ursprünglich für den Einsatz als Schulbuch konzipierten, darüber aber teilweise deutlich hinausgehenden Werks:

   Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; Berlin 2007 [DUDEN PAETEC Schulbuchverlag].

2. Bedürftig, T.; Murawski, R.: *Philosophie der Mathematik*. (4. Auflage) Berlin 2019 [de Gruyter].

Dieses Buch ist für jede Lehrerin und jeden Lehrer, der nicht nur Mathematik unterrichten, sondern bei seinen Schülerinnen und Schülern ein wirkliches Verstehen erreichen möchte, ein Gewinn, da es hilft, sich einen fundierten Überblick über bedeutsame Denker und Themen der Philosophie der Mathematik zu verschaffen, der für ein solches Vorhaben wichtig ist. In Bezug auf die Infinitesimalrechnung ist besonders das Kap. 6 („Infinitesimal denken und rechnen“) empfehlenswert.

3. Keisler, H. J.: *Elementary Calculus*: An Infinitesimal Approach. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt].

   Keisler, H. J.: *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston 1976 [Prindle, Weber and Schmidt]

   Bei dem ersten Buch von Keisler handelt es sich um ein grundlegendes Lehrbuch, welches laut Keisler die Infinitesimalrechnung „at the simplest possible level“ behandelt; das zweite Werk von Keisler nimmt demgegenüber einen höheren Standpunkt ein und gibt einen gedrängten Überblick des mathematischen Inhalts des Lehrbuchs, wobei hier auch Sätze bewiesen werden, welche im Lehrbuch unbewiesen bleiben bzw. deren Gültigkeit ohne Beweis vorausgesetzt wird. Beide Bücher können kostenlos als pdf-Dateien auf der Homepage von Keisler (http://www.math.wisc.edu/ keisler/) in der aktuellen Fassung heruntergeladen werden. Das Lehrbuch ist in einer Neuauflage von 2012 [Dover] auch noch als Printausgabe im Buchhandel erhältlich.

4. Landers, D.; Rogge, L.: *Nichtstandard Analysis*. Berlin/Heidelberg 1994 [Springer].

   Dieses Buch ist seit einem Vierteljahrhundert das umfassende deutschsprachige Lehrbuch; seine Zielgruppe sind Studierende, welche bereits gewisse Grundkenntnisse der Hochschulmathematik erworben haben, sowie auf Hochschulniveau mathematisch vorgebildete Interessierte. Erwähnenswert sind auch die Teile zur Nichtstandard-Topologie und zur Nichtstandard-Stochastik.

5. Laugwitz, D.: *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim/ Wien/ Zürich 1986 [Bibliographisches Institut]

   Detlef Laugwitz, zusammen mit Curt Schmieden ein Pionier der modernen Infinitesimalrechnung, gibt in diesem Buch die reifste Darstellung seines infinitesimalen Zugangs mittels der Omega-Zahlen. Bemerkenswert sind auch seine historischen und philosophischen Bemerkungen und sein Ausblick am Ende des Buches.

6. Baumann, P.; Bedürftig, T., Fuhrmann, V. (Hrsg.) (2021). *Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2021

   Dieses Lehrbuch haben wir oft zitiert. Es ist aus dieser Handreichung hervorgegangen und war ursprünglich als ihr Teil II geplant; es erscheint jetzt eigenständig in erweiterter Form und bietet den Hintergrund für die Arbeit mit unserer Handreichung. Es stellt Nonstandardansatz und Standardansatz nebeneinander und untersucht ihre Grundbegriffe.

Für Lehrerinnen und Lehrer sehr zu empfehlen ist die folgende Internetseite von P. Baumann und T. Kirski: http://www.nichtstandard.de Diese Seite bietet sehr viel Material zum kostenlosen Download an, welches gut im Unterricht eingesetzt werden kann, sowie interessante Tutorials. Dort finden Sie auch eine umfangreiche Literaturliste.