dx, dy – aus Geschichte und Gegenwart der Infinitesimalien und Grenzwerte

Thomas Bedürftig

Geschichtsschreibung ist rückwärtsgewandte Prophetie.[1]

frei nach Friedrich Schlegel

Zusammenfassung. Der Text beginnt mit einem knappen Blick auf die Anfänge der Infinitesimalien im 17. Jahrhundert. Im zweiten Abschnitt verfolgen wir das Schicksal des unendlich Kleinen ins 19. Jahrhundert, entdecken, wie der sich abzeichnende Grenzwertbegriff aus dem Infinitesimalen hervorgeht und die Grenzwerte die Infinitesimalien schließlich verdrängen. Die Rückkehr der Infinitesimalien im 20. Jahrhundert und ihre Wirkung auf grundlegende Vorstellungen in Mathematik, Didaktik und Methodik sind Gegenstand eines längeren Abschnitts 3. Wir schildern, woher das Infinitesimale mathematisch zurückkommt und wie das geschieht, entdecken unendlich Kleines in der Schule und machen erste didaktische Bemerkungen zum Einstieg in die Infinitesimal*rechnung* – im Sinne des Wortes. Wir stellen schließlich diesen neuen, im Kern sehr alten, *arithmetischen Weg* in die elementare Analysis dem *Grenzwertweg* gegenüber.

Einleitung

Da Zurückschauen in die Geschichte oft so heikel ist, wie die Zukunft vorherzusagen, habe ich diesem Text ein Motto vorangestellt. Es erspart mir dort, wo ich aus der Geschichte der Mathematik berichte, umständlich im Konjunktiv zu sprechen. Es mahnt zugleich, gründlich zu forschen und gewissenhaft zu interpretieren.

Infinitesimalien tauchen in der Mitte des 17. Jahrhunderts auf und stammen von Pascal, Newton und Leibniz. Ihr historischer Gebrauch geht vor allem auf Leibniz zurück. An ihn halten wir uns. Heute begegnen uns Infinitesimalien in der elementaren Analysis gewöhnlich nur noch als Schreibfiguren wie dx, dy, die keine eigenständige Bedeutung haben.

„Infinitesimal“ bedeutet „unendlich klein“. Diese Auskunft über die alten Infinitesimalien aber reicht nicht. Ist das Infinitesimale „das Kleinste“? In der Geschichte der Mathematik und Philosophie ging es in der Tat, wenn es um unendlich Kleines ging, um „das Kleinste“, um Atomares – bis Leibniz und Newton kamen. Mit den Infinitesimalien trat etwas Neues, nie da Gewesenes auf:

> Infinitesimalien sind unendlich klein, aber *nicht* atomar oder, wie es in der Scholastik hieß, indivisibel. Sie sind weder Atome noch Punkte.
>
> Infinitesimalien sind Strecken wie gewöhnliche Strecken und Größen wie gewöhnliche

[1] „Der Historiker ist ein rückwärtsgekehrter Prophet.“ Athenaeum I (1798)

Größen, also teilbar wie andere Kontinua, nur unendlich klein.

Leibniz *widerspricht* Aristoteles, der unendlich Kleines und unendlich Großes nicht zuließ, und *bestätigt* seine Auffassung des Kontinuums. Er vertieft das geometrische Kontinuum um das Infinitesimale und erweitert die alte aristotelische Anschauung (s. Bedürftig/Murawski (2017)).

1 Der Anfang: Leibniz' Infinitesimalien

> „Man muß aber wissen, daß eine Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, auch eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus Linienstückchen (*ex lineolis*), eine Fläche aus Flächenstückchen, ein Körper aus Körperchen, die unendlich klein sind (*ex corpusculis indefinite parvis*). (*Mathematische Schriften* Bd. 7, S. 273)

Zuerst begründet dieses Zitat, was wir oben schon zur Klärung des Begriffs „infinitesimal" bei Leibniz gesagt haben. Was aber sind diese „unendlich kleinen Strecken" und „infinitesimalen Größen". Gibt es sie? Oder sind sie Einbildungen?

> Sind Infinitesimalien Fiktionen?

Leibniz selbst hat von „Fiktionen" gesprochen (*„quantitates fictitiae"*, s. Knobloch (2016), S. 36 u. S. 128). Die Bedeutung des lateinischen „fictio" ist weit. Sie reicht von

> „Vorstellung" und „gedankliche Gestalt" bis
>
> „Phantasie" und „Unsinn".

Heute interpretiert man „Fiktion" gern negativ und legt die Infinitesimalien als historische Verirrung beiseite. In diesem negativen Sinne – von Fiktionen als Erdichtungen irrealer, unsinniger oder gar falscher (*fictae*) Gebilde – darf und kann man bei Leibniz nicht sprechen.

Leibniz dachte so:

> „Man kann somit die unendlichen und die unendlich kleinen Linien – auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt – doch unbedenklich als *ideale Begriffe*[2] brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Analysis." (Zitiert nach Becker (1954), S. 165 ff.)

Infinitesimalien bei Leibniz sind, so meine ich, neue Idealisierungen in der alten Welt der idealen geometrischen Kontinua. Sie bringen eine neue qualitative Dimension in die Auffassung des Kontinuums, die die rein quantitative Erfassung durch endliche Größen oder Zahlen erweitert.

Wir wollen diese Interpretation weiter stützen und blicken auf die „Ur-Infinitesimalien" im alten charakteristischen Dreieck.

[2] Hervorhebung durch mich

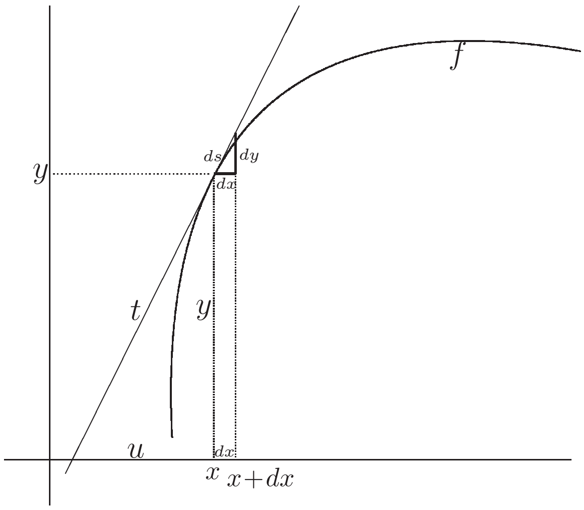


Abbildung: Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Das Dreieck in dieser Abbildung scheint zuerst wie eine Täuschung zu sein. Denn Infinitesimalien kann man nicht sehen. Sie sind unendlich klein und keine wirklich „reellen Dinge". Wir nehmen eine Lupe mit unendlichfacher Vergrößerung zur Hilfe:

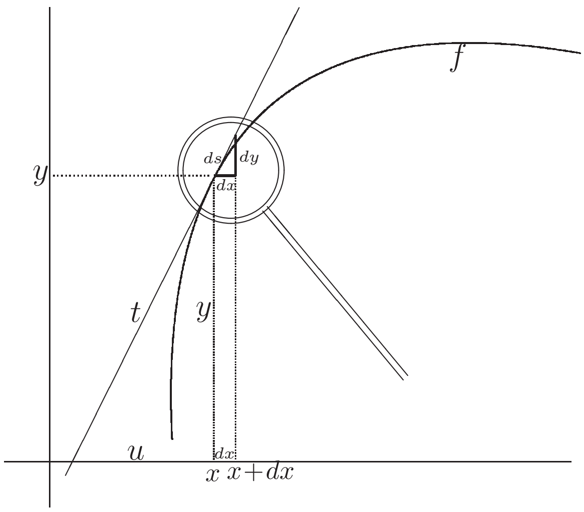


Abbildung: Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Ist nicht diese gedachte Lupe jetzt Fiktion, Phantasie oder Dichtung? Ja und nein. In seinem Aufsatz „Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung" hat Karl Kuhlemann (Kuhlemann 2017) gezeigt, dass die „Unendlichkeitslupe" mehr ist. Er beweist, dass die infinite Vergrößerung für die Graphen stetig differenzierbarer Funktionen, wie sie in der Schule vorkommen, eine mathematisch legitime Technik ist. Vielleicht kann man es so sagen: Man kann und darf das Infinitesimale, das Gedankliches und Ideales ist, veranschaulichen. Leibniz hat dies intuitiv getan.

Die Infinitesimalien ds, dx sind, auch wenn man sie im eigentlichen Sinne nicht „als reelle Dinge zugibt", nicht nichts. Davon ist Leibniz überzeugt. Sie haben für Leibniz eine gewisse Existenz:

> „Dennoch aber werden die ds und dx nicht im absoluten Sinne ‚Nichts' sein,

> da sie zueinander stets das Verhältnis von $t : u$ bewahren, [...].“[3]

Infinitesimalien stehen in Verhältnissen zueinander und werden Elemente des Rechnens. An anderer Stelle heißt es:

> „Gegeben sind auch unbestimmbare Größen, und zwar unendlich klein und infinitesimal (Dantur et quantitates inassignabiles ...)“. (Leibniz, Mathematische Schriften Bd. 7, S. 68)

Leibniz spricht einmal vom „Licht“, das er in dem charakteristischen Dreieck sah. Er entdeckte Infinitesimalien während seines Paris-Aufenthalts in einem nachgelassenen Manuskript Pascals, in dem es um den Viertelkreis ging. Es waren, so meine ich, zwei Lichter. Das eine ist die Idee der Verallgemeinerung des charakteristischen Dreiecks vom Viertelkreis auf beliebige Kurven, so, wie sie schon oben in den Abbildungen angewendet ist. Das andere Licht ist das Licht der Existenz.

Wir können es so sehen:

> Das charakteristische Dreieck ist zwar unendlich klein. Im Endlichen aber spiegelt es sich wieder. Die Verhältnisse der *unendlich kleinen* Seiten zu den *endlichen* Seiten bilden eine *Brücke* zwischen der Realität der endlichen Größen und den Infinitesimalien.

Diese Brücke ist der Hinweis auf eine „Realität“ der Infinitesimalien – nicht nur eine Art „formalistischer“ Existenz, die aus ihrer „Konsistenz“ im Rechnen kommt. Es ist eine „*anschauliche* Existenz“.

Den geometrischen Aspekt der Infinitesimalien finden wir auch deutlich in den historischen Postulaten von Bernoulli 1691, die er in einem Entwurf eines Lehrbuches formuliert hat (s. Schafheitlin (1924), S. 11).

> *Postulat 1.*
> *Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.*
>
> *Postulat 2.*
> *Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Strecken, die selbst unendlich klein sind.*
>
> *Postulat 3.*
> *Eine Figur, die durch zwei Ordinaten, der unendlich kleinen Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve begrenzt ist, wird als Parallelogramm betrachtet.*

Etwas eigenartig für heutige Ohren ist das „unlogische“ Postulat 1 – und war es auch für manche damaligen. Es war Anlass für heftige philosophische Kritik bis zur Verspottung, die zwei Jahrhunderte andauerte.

Gegen alle Kritik, gerade auch, denke ich, durch die Kraft ihrer anschaulich-arithmetischen Existenz, setzten die Infinitesimalien sich durch. Sie übten eine große Faszination auf die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts aus. Nicht zuletzt ihre anschaulich-geometrische Bedeutung spielte eine wesentliche Rolle beim Siegeszug der Infinitesimalien. Wir fassen zusammen:

[3] Bezeichnungen aus den Zeichnungen für die originalen Bezeichnungen eingesetzt, zitiert nach Becker (1964), S. 163).

- Nicht nur das Funktionieren, auch die (nur verborgene) Anschauung und Existenz hatten Einfluss auf die Erfolgsgeschichte der Infinitesimalien.

Diese Erfolgsgeschichte ging im Jahr 1872 zuende. In diesem Jahr, das Jahr der Konstruktion der reellen Zahlen, kam das Aus – gründlich. So gründlich, dass die Infinitesimalien als mathematische Elemente verschwanden. Sie wurden mathematisch gelöscht und gelten heute für viele als Zeugen einer mathematisch finsteren Vergangenheit. In einem Lehrbuch der Analysis lesen wir:

> „[...] heute kann man kaum glauben, dass unendlich kleine Größen bis in die Zeit von Cauchy und Weierstraß, also bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts, zum Handwerkszeug der Mathematiker gehörten. Sie sollten [...] niemals (!)[4] die Ausdrücke dy und dx als eigenständige Größen verwenden." (Behrends (2003), S. 237)

Wir kommentieren das nicht, sondern verfolgen die Spur der Infinitesimalien weiter. Wie kam es, dass die Infinitesimalien eines Tages verschwanden?

2 Das Ende der Infinitesimalien.

Wer oder was hat die Infinitesimalien entfernt? Es waren die Grenzwerte. Wo kommen die Grenzwerte her?

An vielen Stellen erläutert Leibniz die Infinitesimalien als variable, „beliebig klein" werdende Größen. Das erinnert ein wenig an die Grenzwert-Propädeutik, die heute für den Mathematikunterricht empfohlen wird. Genauer, erstaunlich genau, sagt es Leibniz 1701 so:

> „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei als der gegebene Fehler, [...] ." (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 125)

Ist das nicht bereits die berühmte *Finitisierung* des 19. Jahrhundert, die das Infinite der Infinitesimalien finit erübrigt? Was Leibniz hier sagt, ist in der Tat leicht in unsere ε, δ-Grenzwerte zu übersetzen:

> „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen (x), wie nötig ist ($< \delta$), damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler ($< \varepsilon$), [...] ."

1676 schon hatte Leibniz in *De Quadratura* (Knobloch (2016)) ganz Ähnliches gesagt – 150 Jahre vor Cauchy.

Die Finitisierung wird oft als eine Art *Rettung* gesehen, die die Analysis nach Jahrhunderten fehlender Strenge im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts wieder auf feste Füße stellte und die philosophische Kritik verstummen ließ. Als Thomas Sonar die Formulierung in *De Quadratura* las, geriet er ins Schwärmen:

> „Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben." (Sonar (2016), S. 65)

[4] (!) im Original

Ist das wahr?

Wir schauen uns zwei späte Stationen der Grenzwerte in den nicht ersparten Jahrhunderten an: Formulierungen von Cauchy und Weierstraß. Cauchy gilt in der Regel als Vater der sogenannten Finitisierung des Infinitesimalen durch den Grenzwert. Bei ihm findet man die ε, δ-Formulierung der Stetigkeit. Cauchy 1821:

> „Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion $f(x)$ zwischen den festgesetzten beiden Grenzen der Veränderlichen x eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird als jede endliche Zahl. Mit anderen **Worten**: *Die Funktion $f(x)$ wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Bezug auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt.*“[5] (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 196)

Was sehen wir? Grenzwert und Infinitesimales in trauter Eintracht. Die Grenzwertvorstellung erläutert das unendlich Kleine. Das unendlich Kleine verkörpert den Grenzwert. Das eine ist das andere, nur in „anderen Worten“.

40 Jahre später, 1861, 11 Jahre vor den reellen Zahlen, formuliert Weierstraß so:

> „Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ verändern; die Differenz $f(x) - f(x+h)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, dass das Argument von x in $x+h$ übergeht. Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h) - f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument [. . .] .“

Das ist perfekt und entspricht unserer gewohnten ε, δ-Formulierung ganz.

Aber *Achtung*! Ich habe etwas unterschlagen. Das Zitat eben ist nur ein Torso des Originals. Was sagte Weierstraß 1861 wirklich? Ich zitiere erneut und vollständig – nach dem 1. Satz oben beginnend:

> „[. . .] Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h) - f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so **sagt** man,
>
> es entsprechen unendlich kleinen Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion. Denn man **sagt**, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion entsprechen, so sagt man,
>
> dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei [. . .] .“[6] (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 236)

Diese Formulierung gewinnt gegenüber Cauchy an Formalität. Aber es ist 1861 gedanklich

[5] Hervorhebungen durch mich

[6] Hervorhebungen und Strukturierung durch mich

und sprachlich wie zuvor – wie bei Leibniz 1701 und bei Cauchy 1821: Die ε, δ-Vorstellung beschreibt das unendlich Kleine – und umgekehrt. Man sagte Grenzwert und dachte Infinitesimalien – und vice versa. Vorstellungen, die wir heute klar unterscheiden, gehörten zusammen.

Die Zitate lassen, wenn wir genauer hinschauen, folgendes vermuten:

- Man *sagte*

– „kleiner als irgendeine noch so kleine Größe ε“ (Weierstraß), oder

– „kleiner als jede endliche Zahl ε“ (Cauchy)

- und *dachte*

– „kleiner als alle ε“.

Wenn wir von heute, aktualisierend, darauf blicken, erkennen wir in der letzten Formulierung die Definition von „infinitesimal“:

– α ist unendlich klein, wenn $\forall\varepsilon\,(\alpha < \varepsilon)$.

Was war damals offenbar noch ganz anders als heute? Die mathematische Sprache war „nur“ eine präzisere Umgangssprache. Man dachte dialogisch, nicht logisch. Die mathematische Logik, deren Elemente erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts begannen, die mathematischen Formulierungen zu strukturieren, gab es nicht. Heute sind sie Alltag. Kurz: Die logische Struktur in den Formulierungen war damals weniger differenziert. In unserem Beispiel: Die Vorstellung des *Vorgebens* von Elementen war nicht klar unterschieden von der Vorstellung des *Vorgegebenseins* „der Elemente“. Aus heutiger Sicht: Formulierungen über Infinitesimalien und Formulierungen über Grenzwerte gingen notwendig ineinander über.

Formalisiert, nach heutigem Standard, sieht Weierstraß’ Stetigkeit so aus:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall h\ (|h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon).$$

Wenn wir hier wieder genau hinsehen, wird deutlich, dass neben der klaren logischen Struktur in den alten Formulierungen noch weiteres, *Entscheidendes* fehlte.

Betrachten wir die Quantoren $\forall\varepsilon$, $\forall h$. Was kann „$\forall\varepsilon$“ bedeuten, woher kommen „alle“ h? Worüber erstreckt sich der Quantor $\forall$, würden wir heute sagen. Dies ist die Frage nach klar umrissenen Definitions- und Wertebereichen. Das Problem war, sie waren unendlich – und damals gerade dadurch *nicht klar* bestimmt. Unendlichkeit war potentiell und offen, unendliche Bereiche von Größen waren nicht abgegrenzt. Sie waren unbegrenzt und stetig wie die geometrische Gerade. Das musste sich ändern:

- Die Finitisierung wartete auf die infiniten Mengen.

Die ließen nicht lange auf sich warten.

Wir skizzieren die jetzt folgenden Etappen in knappen Sätzen:

- Cantor führte die unendlichen Mengen ein.
- Die reellen Zahlen wurden 1872 konstruiert.

– Die reellen Zahlen wurden in die geometrische Gerade projiziert.

– Die reellen Punkte auf der Geraden wurden zu *den* Punkten der Geraden erklärt.

- Die *Zahlengerade* war erfunden.

Das war das Ende der Infinitesimalien. Denn neben den reellen Zahlen war auf der Zahlengeraden kein Platz.

- Die Infinitesimalien fielen buchstäblich aus dem Kontinuum heraus.

Sie waren plötzlich Fremdkörper, die weg mussten. Cantor schreibt im Jahr 1893 an Giulio Vivanti über die Infinitesimalien als

> „[...] papierne Größen, die gar keine andere Existenz haben als auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger“

und vom Infinitesimalen als dem

> „infinitären Cholera-Bazillus der Mathematik“. (Zitiert nach Meschkowski (1966), S. 506)

Der letzte Angriff spricht für sich. Wenn man an den mathematischen Platonisten Cantor denkt, ist die erste Formulierung nicht weniger vernichtend. Seine unendlichen Mengen waren nicht papiern, für ihn waren sie Elemente einer realen Welt realer Ideen. Leibniz, Newton und alle ihre Schüler werden zu Nominalisten gestempelt. Man realisiere die Situation: Was Cantor seinen unendlichen Mengen, die man keineswegs als „reelle Dinge zugeben“ muss, platonistisch zuschrieb, spricht er den Infinitesimalien ab.

Cantors Haltung gewann die mathematische Oberhand: Heute sind dx, dy aus dem Fundament der Analysis verschwunden und stehen als reine Schreibfiguren nur noch auf dem Papier.

Was musste nicht alles passieren auf dem Weg von Leibniz' Infinitesimalien bis zu den Grenzwerten. Es geschahen Dinge, die 1701 und noch lange danach undenkbar waren. Wir geben wieder nur Stichworte:

- Die mathematische Sprache musste mathematisch-logisch werden.
- Mengen mussten unendlich und

  Funktionen infinite Wertetabellen werden.
- Der Zählprozess $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ musste stillstehen. Er „kristallisierte“ zur statischen Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$.
- Rationale Zahlen wurden Mengen von Paaren natürlicher Zahlen.

Die Wirkung war:

- Folgen wurden Mengen.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wurde als Menge von Mengen (Klassen) von Mengen (Folgen) von Mengen (von Paaren natürlicher Zahlen) konstruiert.
- Sie wurden die lang gesuchten Zahlen, gegen die – als „Grenzwerte“ – unendliche Folgen konvergierten.
- Die Gerade wurde zur Punktmenge.
- Die *anschaulich*-geometrische Vollständigkeit wurde mengen*theoretisiert*.

Es war ein langer Weg – und eine *Revolution im mathematischen Denken*.

Wir betonen: Die Grenzwerte haben ihren „sicheren Untergrund“ erst in den reellen Zahlen gefunden. Bis dahin hatte es zwei volle, mathematisch turbulente, Jahrhunderte gebraucht.

Was hatte Thomas Sonar oben über Leibniz' grenzwertartige Formulierung gesagt?

> „Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben."

Eine solche Aussage kann man nur machen, wenn man eine komplette Revolution übergeht. Sie ist ein klassisches Beispiel „rückwärtsgewandter Prophetie", die auch und besonders in einem populärwissenschaftlichen Artikel nicht erlaubt ist. Einen anderen Kommentar dazu lesen wir bereits im Jahr 2009. Herbert Breger hat ihn freundlich so geschrieben (Breger (2009), S. 134):

> „Was seine [Leibniz'] Differential- und Integralrechnung anlangt, so kann man ihr nicht gerecht werden, wenn man sie mit der Brille der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts betrachtet."

3 Die Rückkehr der Infinitesimalien

Die Infinitesimalien waren mathematisch verschollen. Im „mathematischen Untergrund" aber – unter Laien, in Medien, bei Schülern, in der Physik und bei Physikern – waren sie weiter präsent. Wir werfen einen Blick in die Schule.

3.1 Infinitesimales in der Schule

In der Schule scheinen die Grenzwerte nur geringe Chancen zu haben, wie die folgenden Zahlen aus einer Studie aus dem Jahr 2011 (Bauer (2011)) belegen. Es geht darin um den wohl einfachsten Grenzwert 1 und die nach der Nullfolge $(\frac{1}{n})$ vielleicht berühmteste Folge $0,999\ldots$. Die Frage an 256 Gymnasiasten aus den Klassen 7 bis 12 und 50 Mathematikstudierende (nach dem 3. Semester) war, ob

> a) $0,999\ldots < 1$ oder b) $0,999\ldots = 1$

ist. So fiel die Abstimmung an bayerischen *Gymnasien* aus:

72,2%	31,6 %	3,1 %	4,3 %
a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
$1 - 0,999\ldots$ unendlich klein	$1 - 0,999\ldots = 0$		

Die erste Spalte zeigt bei Schülerinnen und Schülern, tendentiell Infinitesimales zu denken, die zweite weist auf die Grenzwertvorstellung hin.

Sieht man sich die Begründungen für b) an, so sind die $31,6\%$ zu hoch gegriffen. Denn es handelt sich in sehr vielen Fällen um keine wirkliche Entscheidung: „Haben wir mal gelernt" ist der Kommentar, der keine Begründung ist. Andere Argumente für die Entscheidung für b) sind zum Beispiel

- „Weil es *fast schon* 1 ist."
- „$0,999\ldots\ = 1$ weil die Zahl, *die fehlt*, so unendlich klein ist."

und begründen eigentlich a). Wir bemerken die „unendlich kleine Zahl" $1 - 0,999\ldots$ in der letzten Begründung.

Andere Argumentationen, z.B. gelernte Beweise über $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, sind Scheinargumentationen. Denn sie setzen voraus, was genauso wenig geklärt ist. Die Gegenfrage nämlich wäre, warum nicht $0,333\ldots < \frac{1}{3}$ ist (s. Bedürftig/Murawski (2015), A 2).

Schlagend für a) $0,999\ldots < 1$ ist das Argument

– $0,999\ldots$ *ist kein Ganzes*,

das abgewandelt oft auftritt. Da ist jede mathematische Gegenargumentation über Grenzwerte sinn- und machtlos. Grenzwerte werden von Folgen schlicht nicht erreicht, selbst in diesem einfachsten Fall, wo der Grenzwert 1 vor den Füßen liegt. Unendliche Folgen sind – nicht nur für Schüler – „kein Ganzes“, sondern potentiell unendlich.

Ebenso oft tritt die Vorstellung des Infinitesimalen für die Begründung von a) auf – hier explizit:

– „Weil es fehlt der Zahl $0,99999999\ldots$ die Zahl $0,00000000000..1$ um genau 1 zu sein.“

Man beachte die infinitesimale Zahl $0,00000000000..1$.

Selbst bei *Studierenden* der Mathematik nach dem 3. Semester, die befragt wurden, ist das Ergebnis ernüchternd:

a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
50%	50%	0%	0%

Die Grenzwerte in den Vorlesungen Analysis I und II scheinen wenig eindrücklich gewesen zu sein. Die Begründungen der Studenten für ihre Entscheidungen für a) und b) ähneln denen der Schüler.

Das unendlich Kleine ist den Schülerinnen und Schülern anschaulich und arithmetisch nicht fremd. Erfahrungen im Unterricht mit Infinitesimalien bestätigen das (Dörr (2017), Baumann/Kirski (2016)). Dagegen haben 90 Jahre Grenzwerte und Analysis in der Schule und ebenso viele Jahre Didaktik der Analysis offenbar wenig voran gebracht. Das Unendliche der Folgen, das Stetige des Strebens von Werten scheint für Schüler ein offener Prozess zu bleiben, die Kluft zum Grenzwert tief. Man denke an den langen Weg von der ursprünglichen Intuition der Infinitesimalien zu den formalen Grenzwerten. Grenzwerte sind der Intuition offenbar so fern, dass selbst ihr Mathematikstudium sie kaum näher bringt. Die offizielle Rückkehr der Infinitesimalien in Lehre und Schule, so meine ich, ist ein Versuch wert. Unten diskutieren wir erste Schritte.

3.2 Wo kommt das Infinitesimale mathematisch wieder her?

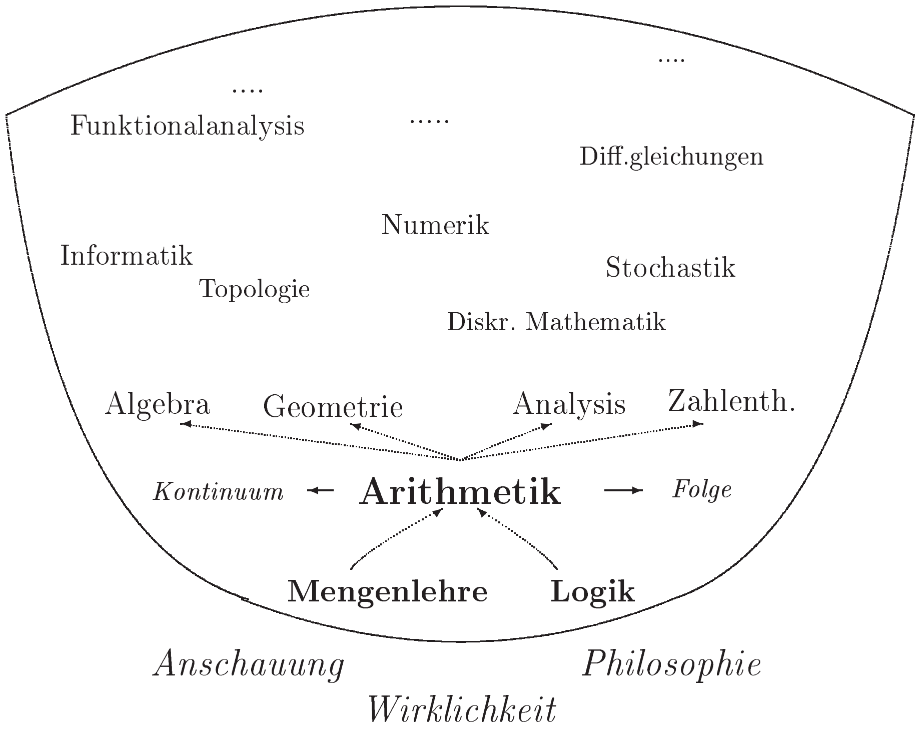
Wir kehren in die mathematische Oberwelt zurück. Woher kommen die untergegangenen Infinitesimalien zurück in die Mathematik? Wir müssen etwas ausholen.

Was war eigentlich passiert? Manches Detail der Revolution haben wir angedeutet. Wir schauen jetzt von ganz oben auf die Mathematik und machen uns ein grobes Bild.

Die Grundlage der alten Mathematik waren Anschauung und Wirklichkeit – und Philosophie, die die Begriffe lieferte. Arithmetik und Zahlentheorie auf der einen Seite, Geometrie und Größenlehre auf der anderen bildeten sich aus. Algebra und Analysis kamen in der frühen Neuzeit hinzu. Im 19. Jahrhundert geschah die schon viel besagte Revolution.

Das Bild der Mathematik änderte sich gravierend. Die Mathematik schuf sich ihre eigenen

Grundlagen, die Mathematischen Grundlagen: Mengenlehre und Logik. Sie begründeten die Arithmetik. Diese sagte, was Folgen und das Kontinuum ist. Die Arithmetisierung, die reine Mathematik, war gelungen. Eine unglaubliche Entfaltung mathematischer Einzeldisziplinen setzte ein. Axiomatik, exemplarisch in den *Grundlagen der Geometrie* im Jahr 1899 von Hilbert vorgegeben, bildet seitdem den Rahmen der Disziplinen, zu denen die Mathematischen Grundlagen, Mengenlehre und Logik, gehören. Von weit, weit oben sieht die Mathematik heute so aus:



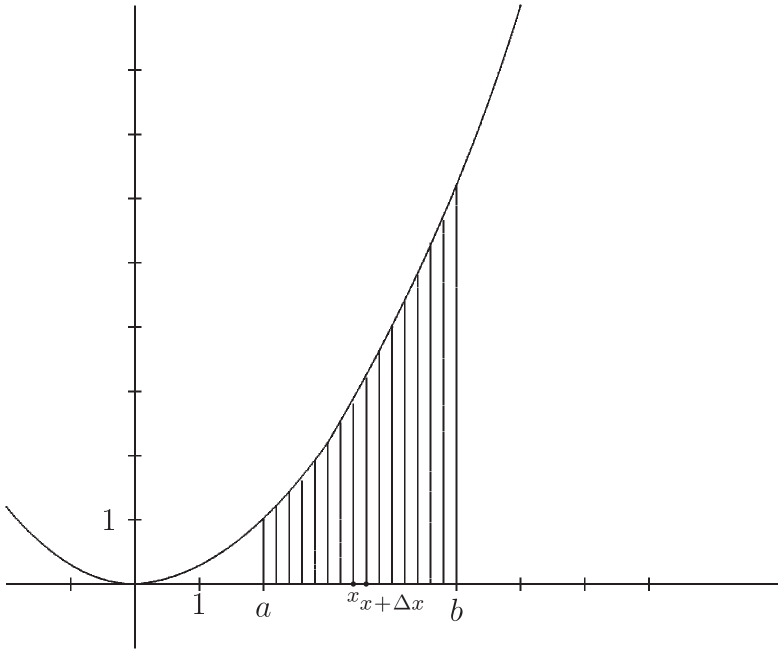
Die Grundlagen der Mathematik sind Mathematik geworden. Die reine Mathematik erhebt sich über die unreine Wirklichkeit und Anschauung – und ist von der Philosophie geschieden. Mathematik, früher ontologisch gebunden, ist *höhere* Mathematik, ist Theorie geworden: ein theoretischer, in sich geschlossener Corpus theoretischer Disziplinen. In den Anwendungen üben sie eine nie da gewesene Wirkung auf die zurückgelassene Wirklichkeit aus. Die verlassene Philosophie steht dem Phänomen „Mathematik" fasziniert gegenüber.

Ausgangspunkt der großen Entwicklung, das dürfen wir hier nicht vergessen, waren die Infinitesimalien gewesen. Sie führten die Analysis im 18. und 19. Jahrhundert in große Höhen. Wir haben ihre allmähliche *Mutation*, so kann man es ausdrücken, zu den formalen Grenzwerten gesehen, die schließlich ihre infinitesimalen Vorfahren verdrängten. Die Grenzwerte und ihre begrifflich strenge Klärung führten notwendig in die neuen Mathematischen Grundlagen und in eine theoretische Mathematik. Die Finitisierung mündete in eine phantastische Infinitisierung.

Jetzt können wir klarer sagen, warum wir diesen Einschub gemacht haben: Die neuen Fundamente der Mathematik, Mengenlehre und Logik, die erfunden wurden, um die unklaren Infinitesimalien zu entfernen, sie haben eben diese wieder hervorgebracht. *Wie*, das sagen wir gleich. Wir beginnen mit einem Beispiel aus der elementaren Praxis, um einen ersten Einblick in die neue Mathematik der Infinitesimalien zu bekommen.

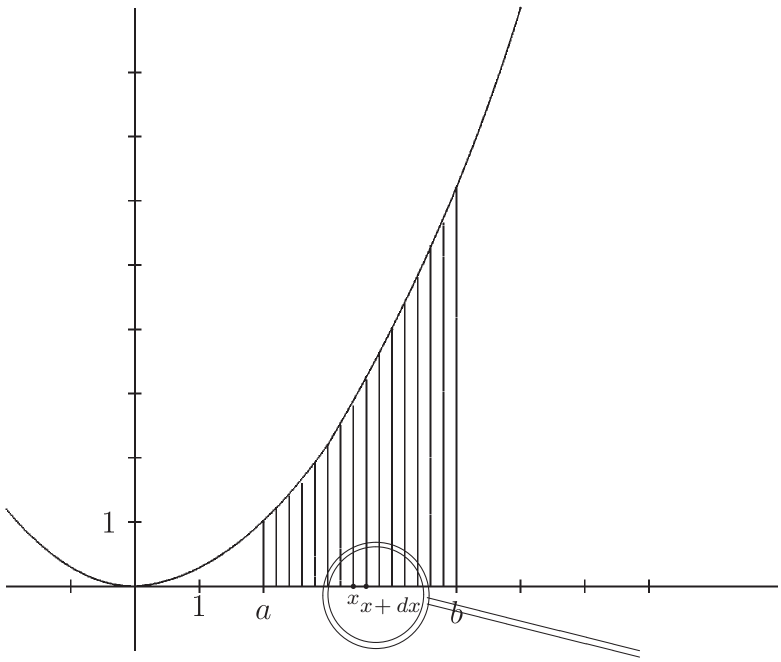
3.3 Beispiel: Integral

Zuerst die übliche Ansicht aus der Praxis der Einführung des Riemann-Integrals.



Dies ist eine Momentaufnahme, so denken wir heute, beim Verschwinden der Δx, verbunden mit der Vorstellung, dass sich verschwindende Rechteckflächen in ihrer Summe einer Fläche nähern, deren Inhalt das bestimmte Integral ist.

Wir versuchen jetzt, anders zu denken – so wie Leibniz sich die Situation vorstellte. Der Unterschied ist äußerlich minimal: Aus Δx wird dx. Wir sind aber nicht in einem Prozess, in dem Δx gegen 0 strebt, sondern sind in einem festen Zustand: dx ist unendlich klein. Wir nehmen uns wieder eine Unendlichkeitslupe und sehen unendlich schmale Streifen der Breite dx:



Die Summe der infinit vielen, sagen wir μ, Rechteckflächen *ist* (bis auf einen unendlich kleinen, reell vernachlässigbaren Unterschied) der gesuchte Flächeninhalt, das bestimmte

Integral. Geht das? Ja, wenn man mit infinitesimalen und infiniten Zahlen rechnen lernt (und es sich um „gutartige“ Funktionen handelt).

Im Verein mit den reellen Zahlen bilden die neuen Zahlen den Bereich der **hyperreellen Zahlen**. Einige tabellarische Notizen dazu:

- Begriffe und Bezeichnungen:

– dx heißt unendlich klein, wenn $\forall r \in \mathbb{R}\,(dx < r)$. Wir schreiben $dx \approx 0$.

– x und $x + dx$ liegen „unendlich nah“ beieinander. Wir scheiben: $x + dx \approx x$.

– Wir rechnen: $b = a + \mu \cdot dx$.

– μ ist unendlich groß, wenn $\forall r \in \mathbb{R}\,(\mu > r)$. Wir schreiben $\mu \gg 1$.

– *Beschränkte Zahlen* sind Zahlen γ mit $\gamma < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Der Schlüssel für den Übergang vom Hyperreellen zum Reellen ist der

- **Standardteil**.

  Jede beschränkte hyperreelle Zahl γ liegt unendlich nah zu genau einer reellen Zahl r: $\gamma \approx r$. r heißt der Standardteil von γ.

Damit kann man schon alles machen. Das Rechnen mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam theoretisch zu entwickeln, ist gut möglich. Praktische Erfahrungen zeigen dies (s. Dörr (2017). Wir gehen unten darauf ein.

Wir betrachten ein *Beispiel*: Der Graph oben stamme von $f(x) = x^2$. Wir setzen $a = 0$.

– Dann ist $x_k = k \cdot dx$ und $b = \mu \cdot dx$.

– Der Flächeninhalt eines Rechteckstreifens von x_k bis $x_k + dx$ ist

  $dx \cdot f(x_k) = dx \cdot (x_k)^2 = dx \cdot (k \cdot dx)^2$.

– Die Fläche unter der Kurve ist

  $\sum_{k=1}^{\mu}(k \cdot dx)^2 \cdot dx = dx^3 \cdot \sum_{k=1}^{\mu} k^2$.

– Die Formel für den letzten Term ist:

  $\sum_{k=1}^{\mu} k^2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}$.

- Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{\mu}(k \cdot dx)^2 \cdot dx = dx^3 \cdot \sum_{k=1}^{\mu} k^2 =$$

$$= dx^3\, \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6} = \frac{dx\,\mu \cdot dx(\mu+1) \cdot dx(2\mu+1)}{6} =$$

$$= \frac{dx\,\mu \cdot (dx\,\mu + dx) \cdot (2dx\,\mu + dx)}{6} = \frac{b \cdot (b + dx) \cdot (2b + dx)}{6} =$$

$$= \frac{b \cdot (2b^2 + 3b\,dx + dx^2)}{6} = \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2\,dx + \frac{1}{6}b\,dx^2 \approx \frac{1}{3}b^3\ .$$

Man kann so rechnen. Das ist mathematisch korrekt und heißt „Nonstandard“. Es gibt keinen Konflikt mit der übrigen, alten Mathematik, die „Standard“ heißt. Was hat sich denn geändert? Statt mit Differenzen Δx rechnet man mit Differentialen dx. An die Stelle des fremden, unarithmetischen Grenzwertprozesses tritt der arithmetische Übergang zum Standardteil.

Im Kern – mit den Bezeichnungen in den obigen Abbildungen – verläuft für nicht-pathologische Funktionen die Definition des Riemannschen Integrals grob so:

> dx sei unendlich klein, μ, die Zahl der Intervalle, sei unendlich groß.
>
> Dann ist $a + \mu \cdot dx = b$, $x_k = a + k \cdot dx$.
>
> Der Flächeninhalt der Streifen ist $dx \cdot f(x_k)$.
>
> Der Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve ist $\sum_{k=0}^{\mu} f(a + k \cdot dx) \cdot dx$.
>
> Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist der Standardteil dieser unendlichen Summe.

Das Integral ist, so wie es historisch war, arithmetisch wieder eine Summe – bis auf die infinitesimale Abweichung. Die Summation ist unendlich und dennoch arithmetisch berechnet. Hinter der Arithmetik geht die Anschauung nicht verloren. Denn hinter dem Integral als Summe steht die anschauliche Zusammensetzung aus den Flächen der Streifen. Das macht manches durchsichtiger, wie wir weiter unten bei der Betrachtung des Hauptsatzes sehen werden.

Wie sieht dieser Moment im Grenzwertzugang zum Integral aus? Im Integral als Grenzwert ist eine Summe nicht mehr zu erkennen. Die Δx-Seite der Streifen und damit die Streifen gehen im Grenzwertprozess verloren. Das Ziel, die Fläche unter der Kurve und der Grenzwert, ihr Inhalt, ist erreicht. Was aber bedeutet dx?

Wir kommen im nächsten Abschnitt zu weiteren wichtigen Punkten im Einstieg in die Differential- und Integralrechnung – und nur um den Einstieg geht es. Hat man das Handwerk grenzwertfrei, in arithmetischer und zugleich anschaulicher Weise gelernt, geht alles so weiter wie gehabt.

3.4 Wie kommen die Infinitesimalien zurück?

Jetzt klären wir das Prinzip der arithmetischen Rückkehr der Infinitesimalien. Es besteht in einer *Zahlbereichserweiterung*, einer Fortsetzung also der Zahlbereichserweiterungen, die den Mathematikunterricht von Beginn an prägen:

- $\mathbb{R}$ wird erweitert zum angeordneten, nichtarchimedischen Körper $^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen.

Diese hyperreellen Zahlen können wie oben quasi-axiomatisch eingeführt werden. Ihre Herkunft kann man in der Schule so wenig thematisieren wie die Konstruktion der reellen Zahlen. Wir schildern die Herkunft exemplarisch und auf die wesentlichen Ideen reduziert.

Wie erhält man die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$? Eigentlich sehr einfach, nämlich logisch, nach *Robinson* (1961):

- Man nehme ein Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$, der reellen Arithmetik.

Damit kann man Nichtstandard-Mathematik machen, so, wie oben angedeutet.

Ich skizziere der Vollständigkeit halber die *logische Rezeptur*, die das Nichtstandardmodell hervorbringt. Für die arithmetische Praxis ist die Rezeptur *irrelevant*.

Dies sind die Schritte zum Nichtstandardmodell:

– Man nehme den angeordneten Körper $\mathbb{R}$.

– Man nehme $Th(\mathfrak{R})$, das sind alle arithmetischen Sätze über $\mathbb{R}$.

- Man nehme $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{0 < \underline{x}, 1 < \underline{x}, 2 < \underline{x} \ldots\}$.
- Jede endliche Teilmenge von Sätzen in Ψ ist gemäß einer Interpretation β mit einem ausreichend großen $\beta(\underline{x})$ erfüllt.
- Man nehme den *Endlichkeitssatz*. Der sagt:
- Es gibt ein Modell $\mathfrak{B}$ von $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{0 < \underline{x}, 1 < \underline{x}, 2 < \underline{x} \ldots\}$.
- Es gilt $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{R})$ und $\beta(\underline{x}) > n$ für alle n.
- Man nehme $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ ist nichtarchimedisch. Den Grundbereich nenne man $^*\mathbb{R}$.

• Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

Die *mengentheoretische Rezeptur* (Schmieden/Laugwitz 1958, Laugwitz 1986) sieht kurzgefasst so aus:

- Man nehme $\mathbb{R}$.
- Man nehme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen (a_n).
- Man definiere eine geeignete Äquivalenzrelation.
- Man definiere $^*\mathbb{R}$ als die Menge aller Klassen.

Also man wiederhole *im Prinzip* das, was man bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ gemacht hat. Die Schritte der Konstruktion, die für die Praxis der hyperreellen Zahlen wieder nicht relevant sind, sind diese:

- Man nehme Cof, die Menge aller cofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$, das sind die Teilmengen, deren Komplement endlich ist.
- Cof ist ein freier Filter.
- Sei $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \{n \mid a_n = b_n\} \in Cof$.
- Man nehme das Ideal $V = \{(c_n) \mid \{n \mid c_n = 0\} \in Cof\}$.
- Man nehme das Zorn'sche Lemma.
- Man nehme in der geordneten Menge aller feineren Filter als Cof einen maximalen Filter U.
- Man nehme das maximale Ideal V_U.
- Man nehme $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_U$.
- $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_U$ ist ein angeordneter, nichtarchimedischer Körper.

• Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

Das ist der Hintergrund, den man für die Praxis so wenig herstellen muss wie den Hintergrund hinter den reellen Zahlen. Die ersten vier Schritte sind interessant, wenn man eine Verbindung zu den Grenzwerten herstellen will. Dazu machen wir unten eine Anmerkung.

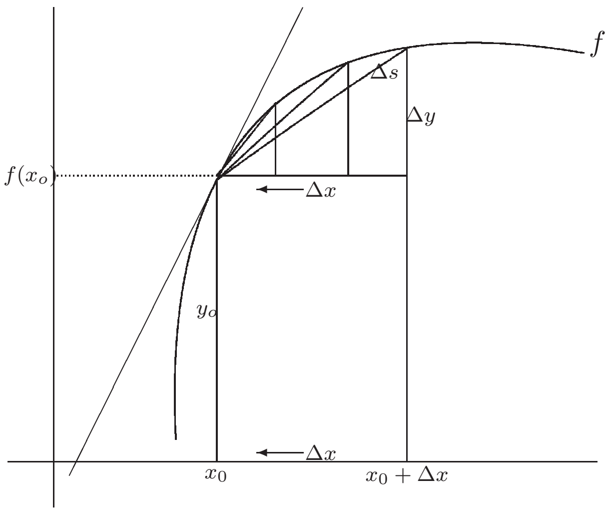
Das sieht entweder sehr logisch oder kompliziert mengentheoretisch aus, basierend auf dem Auswahlaxiom. Es geht auch ohne diesen Aufwand, in einer konservativ erweiterten Mengenlehre. Wenn man nur genau hinschaut, bemerkt man, dass infinite und infinitesimale Zahlen in den Axiomatiken, wie sie in der Analysis I-Lehre üblich sind, gar nicht ausgeschlossen sind. Sie werden nur nicht gesehen werden. (s. Kuhlemann (2018b))

4 Erste stoffdidaktische Bemerkungen

Wir setzen den Einstieg in die Differential- und Integralrechnung fort, den wir oben mit dem *Integral* begonnen haben. Wir stellen im ersten Punkt ebenso knapp das *Differenzieren* im infinitesimalen Zugang dar und stellen ihm den Grenzwertzugang gegenüber. Der Begriff der *Stetigkeit* führt uns in das Problem des Grenzwertbegriffs, das in diesem Zusammenhang offensichtlich wird, und zeigt die Besonderheit des infinitesimalen Zugangs. Wir vergleichen dann beide Zugangsweisen. In einem anschließenden Punkt verfolgen wir den infinitesimalen Ansatz weiter und sehen, wie effektiv er ist, wenn es um die Differentiationsregeln und den Hauptsatz geht. In einigen Anmerkungen, Ergänzungen und Ausblicken schließen wir den Abschnitt ab. In allem müssen wir uns sehr kurz fassen, um den Rahmen eines Aufsatzes nicht zu sprengen.

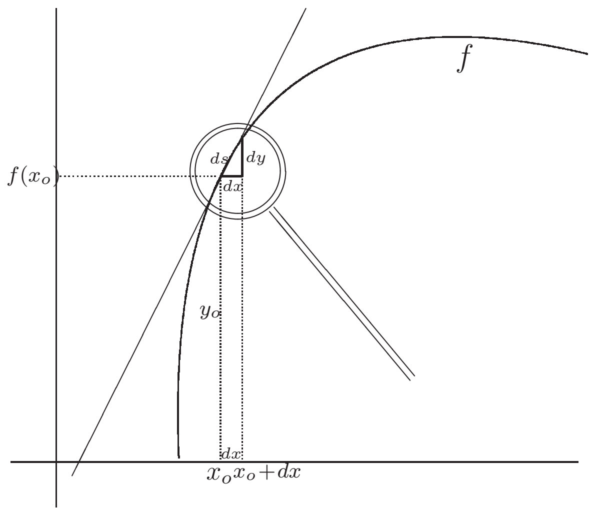
4.1 Differentialquotient und Ableitung

Ein Bild wie das folgende ist Standard:



Das Bild deutet die übliche Heuristik an. Die Hypothenusen von immer kleiner werdenden Sekantendreiecken nähern sich in einem unendlichen Prozess einer Kurve, und wir stellen uns vor, dass die Sekantendreiecke im Berührungspunkt der gesuchten Tangente verschwinden. Zugleich, so denken wir, strebt der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen die Steigung der Tangente. Das Ziel ist der Grenzwert. Mit der Punktsteigungsformel ist die Tangente bestimmt.

Im infinitesimalen Zugang verschwinden die Sekantendreiecke nicht in einem Prozess, sondern „enden“ quasi in einem unendlich kleinen Dreieck, dem alten „charakteristischen Dreieck“, das man sich bis zum Ende des 19. Jahrhunderts vorstellen durfte, das dann verboten wurde und heute mathematisch legitimiert ist. Die Idee des unendlich Kleinen kommt von den Schülern.



Wir erinnern daran, dass die „Unendlichkeitslupe“, die die unendlich kleinen geometrischen Verhältnisse zeigt, kein methodischer Trick, sondern mathematisch begründet ist (Kuhlemann (2018)).

Heuristisch geht auch diesem Ansatz das Verfolgen eines Prozesses kleiner werdender Sekantendreiecke voraus. Ist das unendlich kleine Dreieck aber erst einmal „da“, braucht der infinitesimale Ansatz den Prozess nicht mehr. Nicht allein ein reiner Zahlenwert, der Grenzwert, ist das Ziel, der die Steigung der Tangente angibt. Das Ziel ist hier eine „sichtbare“ Steigung, nämlich die der unendlich kleinen Hypothenuse im Sekantendreieck. Sie ist Teil der Tangente *und* der Kurve. – Wir erinnern uns an Leibniz, der Kurven als Zusammensetzung von unendlich kleinen Linien beschrieb.

So verschieden das Denken ist, so wenig unterscheiden sich zunächst die beide Zugänge im Rechnen. Gravierend wird der Unterschied später, wenn es um die Regeln der Differentiation geht. Wir wählen das Standardbeispiel $f(x) = x^2$ und führen den bekannten Rechenweg durch, um die Analogie zu zeigen.

Der Rechenweg im Grenzwertzugang schließt mit einer Grenzwertbildung

Bestimmung des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \frac{(x_o + \Delta x)^2 - x_o^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x_o^2 + 2x_o\Delta x + \Delta x^2 - x_o^2}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x.$$

Bildung des Grenzwert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_o + \Delta x) = 2x_o.$$

- Die Ableitung ist:

$$f'(x_o) = 2x_o.$$

Der Zugang über Infinitesimalien dx, dy endet in der Bildung des Standardteils:

Bestimmung des Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_o + dx) - f(x_o)}{dx} = \frac{(x_o + dx)^2 - x_o^2}{dx} =$$

$$= \frac{x_o^2 + 2x_o dx + dx^2 - x_o^2}{dx} = 2x_o + dx.$$

dx ist unendlich klein:

$$2x_o + dx \approx 2x_o.$$

- Die Ableitung ist:

$$f'(x_o) = 2x_o.$$

Wir bemerken, dass wir im infinitesimalen Zugang den Differentialquotienten von der Ableitung unterscheiden müssen.

Der Abbildung entnehmen wir $dy = f(x_o + dx) - f(x)$. Da wir mit den infinitesimalen Differentialen rechnen können, erhalten wir den

- *Differentialquotienten* $\frac{dy}{dx}$

und *unterscheiden* davon die

- *Ableitung* $f'(x_o) \approx \frac{dy}{dx}$:

  Die Ableitung ist der Standardteil des Differentialquotienten.

f ist differenzierbar in x_0, wenn es diesen Standardteil gibt.

Im Grenzwertzugang wird die Ableitung, also der Grenzwert der Differenzenquotienten, oft auch „Differentialquotient" genannt. Man verwendet die Bezeichnung „$\frac{dy}{dx}$", obwohl dy und dx reine Schreibfiguren sind und nur einen Erinnerungswert an die im Grenzwertprozess verschwundenen Differenzen $\Delta x, \Delta y$ besitzen. Der Differentialquotient, für den Grenzwerteinstieg ein Relikt aus Leibniz' Zeiten, erhält im infinitesimalen Zugang mathematisch legitimiert seine Bedeutung zurück.

4.2 Stetigkeit

In der Frage, was „stetig" heißt, wird die grundsätzliche Problematik des Grenzwertes deutlich, und es wird verständlich, wieso man sich auf den „propädeutischen Grenzwertbegriff" zurückzieht, ja zurückziehen muss. Weigand (2016) bemerkt, dass man den Grenzwertbegriff im Unterricht eigentlich nur vorbereiten kann, und erörtert die Vorbereitung und zeigt eindrückliche Beispiele.

Stetigkeit ist das Natürliche. Erst seit im 19. Jahrhundert das Kontinuierliche mathematisch in Punkte aufgelöst wurde, ist es nötig, zu sagen, was „stetig" ist. In der Schule ist es daher schwierig, Stetigkeit zu problematisieren und Schüler zu motivieren, sich mit einem konstruierten Problem zu befassen. Denn Schüler denken natürlich, also stetig. Sie denken weniger an Punkte in einer unendlichen Menge von Wertepaaren einer Funktion f, sondern an die stetige Kurve. Die Kurve ist *stetig*, wenn sie keine „Sprünge" macht.

> „Natura non facit saltus."

sagten die Alten seit Aristoteles. Alles andere ist pathologisch oder konstruiert.

Oder wie kann man Stetigkeit in einem Punkt bezweifeln, wenn man so denkt: „Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen mit einem Bleistift ohne abzusetzen zeichnen kann." Ist das peinlich, wenn man so denkt? Nein. Man denkt so, weil man es so tut.

> „Punctum in processu facit lineam."

sagte man in der Scholastik und dachte an die Bewegung. Zeichnerisch: Man setzt einen Punkt und zieht von ihm aus die Kurve – *keine* Punktemenge. Wie kann da in einem Punkt, den man in die Kurve setzt, etwas Unstetiges sein?

Das ist die Problematik der Stetigkeit. Die Grenzwertprozesse, mit denen man auf das künstliche Problem losgeht, erscheinen der natürlichen Stetigkeit – künstlich von außen – aufgezwungen. Hierin liegt die Ursache, dass man quasi kapituliert. Man zieht sich auf den propädeutischen Grenzwert zurück. Wie tut man das? In dem man an die alte, natürliche Anschauung der Linie und Bewegung appelliert: Man lässt den Punkt „fließen", auf der Linie gegen den Grenzwert „streben" oder „nähert" sich ihm. Wir verfolgen einmal das Streben und Nähern.

Beispiel: Wann ist eine Funktion f stetig in x_0?

> Anschaulich: Wenn x gegen x_0 strebt, strebt $f(x)$ gegen $f(x_0)$.
>
> Numerischer Versuch: Wenn x minimal (δ) von x_0 entfernt ist, dann ist $f(x)$ minimal (ε) von $f(x_0)$ entfernt.
>
> Beobachtung: Ist x minimal von x_0 entfernt, dann gibt es x', das „minimaler" entfernt ist. Dann muss auch $f(x')$ „minimaler" von $f(x_0)$ entfernt sein.

Das Ziel solcher Beobachtungen ist ein prälogischer ϵ-δ-Dialog zwischen Vorgabe eines ε und Suchen eines δ. Das Ziel ist die logische Grenzwertfassung

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ (|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon).$$

Warum ist das Ziel kaum erreichbar? Das stetige Streben wurde zum Dialog. Im Dialog liegt noch ein Prozess, der in die Definition der Stetigkeit über Folgen führt. Von ihm geht es weiter in die Statik, die statisch-logische $\forall\ \exists$-Formulierung, die mit der Intuition der Stetigkeit, des Strebens und Fließens, weit entfernt ist. Der letzte Schritt ist groß, die mathematischen Voraussetzungen immens. Wie gewaltig, das haben wir oben gesehen, als wir die Erfinder des Grenzwertes, Cauchy und Weierstraß, auf ihrem Weg zum Grenzwert verfolgten.

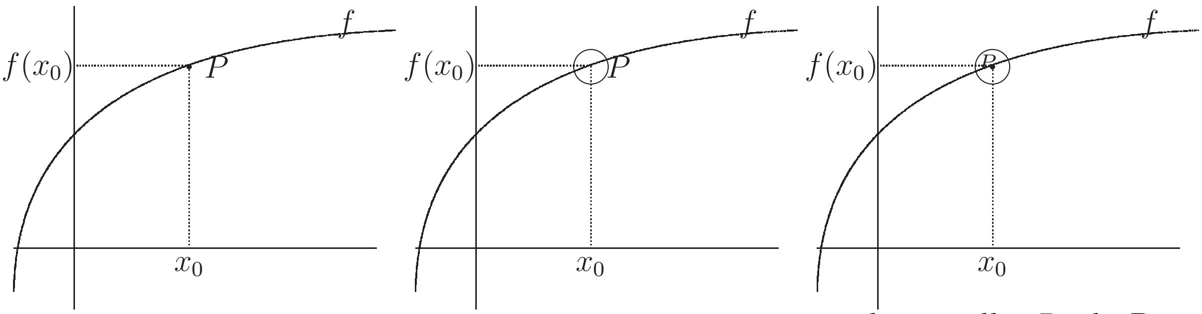
Es kommt noch etwas hinzu, das der Intuition der Stetigkeit eines Graphen einer Funktion f in einem ausgewählten Wert widerspricht. Das Ziel der Charakterisierung der Stetigkeit über Grenzwerte ist gar nicht die Stetigkeit *in* dem Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ der Kurve, sondern *bei* dem Wert x_0, also um x_0 oder um $P = (x_0, f(x_0))$ drumherum.

Im infinitesimalen Zugang passiert hier etwas Besonderes. Man kann eine natürliche Intuition von Stetigkeit in einem Punkt erfassen. Der infinitesimale Zugang akzeptiert die Auflösung der Kurve in Punkte und definiert die Stetigkeit in den Punkten der Kurve. Er erfasst die anschauliche Vorstellung

> „f ist stetig *im* Punkt $P = (x_0, f(x_0))$, wenn man beim Zeichnen der Kurve in $P = (x_0, f(x_0))$ nicht absetzt."

Wie geschieht das?

> Wir sehen den *reellen* Punkt auf dem Graphen.
>
> Wenn wir genauer hinsehen, sehen wir diesen Punkt als eine Monade von hyperreellen Punkten.
>
> Der reelle Punkt wird zum hyperreellen Punkt in dieser Monade:



reeller Punkt P *P als Monade* *hyperreeller Punkt P*

Dass der Bleistift jetzt im reellen Punkt P nicht absetzt, bedeutet, dass der Graph innerhalb der Monade „keine Sprünge“ macht:

- *Definition*:

  f ist stetig in x_0, wenn $f(x) \approx f(x_o)$ für alle $x \approx x_0$.

Anschaulich: Alle $(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$ sind hyperreelle Punkte in der Monade von P.

Der numerische Versuch oben, über minimale Abstände zu sprechen, bekommt jetzt Sinn:

> Wenn x minimal (dx) von x_0 entfernt ist, dann ist $f(x)$ minimal (dy) von $f(x_0)$ entfernt.

Weierstraß hatte dies (1861) so gesagt:

> „Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments (dx) unendlich kleine Änderungen der Funktion (dy) entsprechen, so sagt man, dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument.“

Die infinitesimale Definition der Stetigkeit ist äquivalent zur ε-δ-Definition (Laugwitz (1986), S. 126).

4.3 Erster Vergleich

Wenn man auf die vorhergehenden Gegenüberstellungen schaut, scheint es so, als wenn der Unterschied zwischen infinitesimalen und Grenzwerteinstieg nicht so gravierend wäre. Der Stetigkeitsbegriff macht eine Ausnahme. Hier aber, wie beim Differenzieren und Integrieren, ist von vornherein gravierend:

> Der Grenzwertzugang ruht weitgehend auf einer diffusen Propädeutik des Grenzwertbegriffs.
>
> Den Grenzwerten stehen unendliche Prozesse gegenüber, die in der Regel – nicht nur – von Schülern als potentiell unendlich aufgefasst werden.
>
> Zwischen den Grenzwerten und den unendlichen Prozessen klafft eine Lücke (vgl. Bedürftig (2018), Abschnitt 4.).

Beim infinitesimalen Zugang ist das anders.

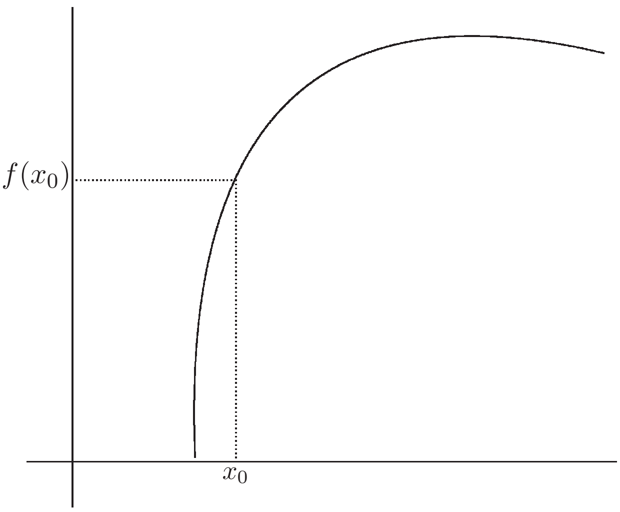
> Dem infinitesimale Zugang liegt eine fundierten Arithmetik zugrunde.
>
> Nach der Heuristik, die unendliche Prozesse beobachtet, fällt die Problematik des Unendlichen weg.

Der letzte Satz ist überraschend. Es muss vorsichtiger heißen: Die Problematik des Unendlichen verändert sich. Sie wird in die Arithmetik verlagert, die aber, wenn sie erarbeitet ist, das Problem der Unendlichkeit überwunden hat. Denn:

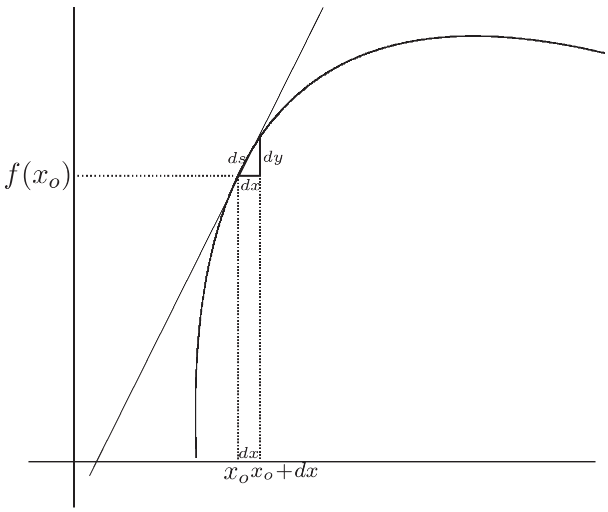
> Die Unendlichkeit ist in den infiniten und infinitesimalen Zahlen arithmetisch gegeben.

Es geht nicht um unendliche Mengen, um unendliche Prozesse, die aktual gedacht werden müssen. Die Zahlen, mit denen man rechnen kann, sind das Unendliche. Das ist eine andere Situation. Die Fundierung des Rechnens, der Arithmetik ist ein wichtiger, interessanter und auch Grundkursen machbarer Gegenstand im Unterricht. Wir gehen unten darauf ein.

Ein anderes wesentliches Unterscheidungsmerkmal der beiden Zugänge in die Analysis kommt aus der Anschauung – ganz abgesehen von der Problematik des Grenzwertes. Beim Problem der Stetigkeit haben wir das schon bemerkt. Wie ist es beim Differenzieren mit der Anschaulichkeit bestellt, die eine wesentliche Stütze für den Lernenden ist. Oben haben wir den Prozess der kleiner werdenden Sekantendreiecke angedeutet. Wir sehen uns die beiden „Endergebnisse“ an:



Sekanten-Dreiecke $\Delta x \to 0$, „Endstation“



Sekanten-Dreiecke $\Delta x \to dx$, „Endstation“

Denken wir den Prozess der Sekantendreiecke zu Ende, dann bleibt im Grenzwertzugang anschaulich nur der Punkt übrig, mit dem man begonnen und in dem die Tangente zu bestimmen ist. Für die Schüler, der ein Ende nicht denken kann, verschwindet die Anschauung der Sekantendreiecke im Unendlichen. Was bleibt ist ein Zahlenwert, der Grenzwert, und die Kluft zwischen Prozess und Wert: Der Prozess erreicht den Wert nicht.

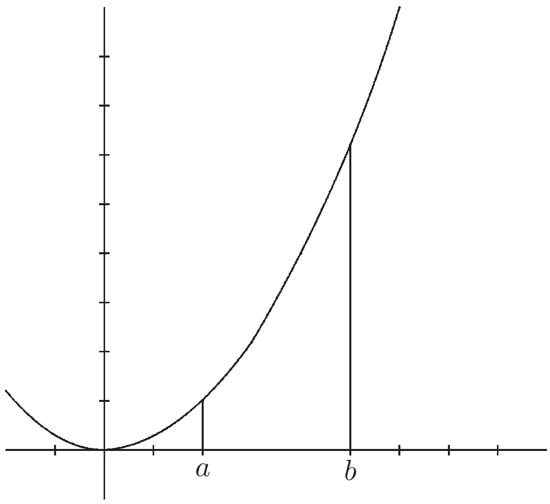
Im infinitesimalen Zugang bleibt die Anschauung erhalten. Die Heuristik des Prozesses wird mit der Idee, der *Vorstellung* des unendlich Kleinen abgeschlossen. Das infinitesimale Steigungsdreieck ist „da“, in dem man die Steigung sehen *und* berechnen kann, die Steigung der unendlich kleinen Hypothenuse, die Teil der Tangente *und* der Kurve ist. – Wir erinnern uns an Leibniz, der Kurven als Zusammensetzung von unendlich kleinen Linien beschrieb, und daran, dass es mathematisch legitim, unendlich Kleines sichtbar zu machen (Kuhlemann 2018a).

Wenn man der Veranschaulichung einen Stellenwert im Lernprozess zubilligt, und dies tut wohl jeder, so kann man den infinitesimalen Zugang als methodisch überlegen ansehen.

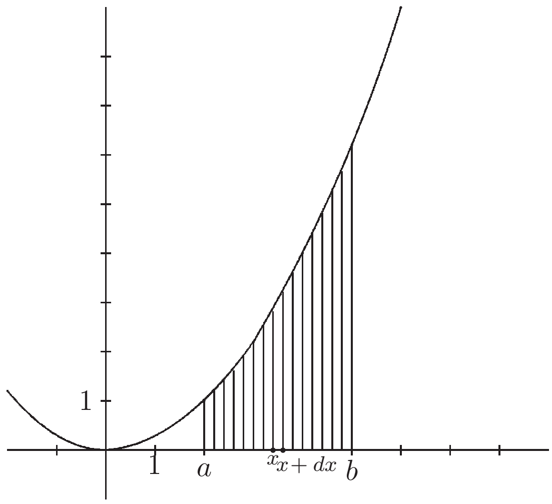
Prozesse wie die problematischen Grenzwertprozesse, die mathematisch von großer Bedeutung sind, werden hier im Anfang der Analysis nicht gebraucht, aber sie gehen nicht verloren.

Die Heuristik beginnt mit Prozessen, bevor sie zu den infinitesimalen Zahlen übergeht. Sie bleiben im Unterricht notwendig präsent, wenn es um Näherungen geht oder um die Darstellung reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche (die jedoch von großer Problematik sind (s. Bedürftig (2018), 4.3)). Sie werden zudem interessant, wenn man die Repräsentation hyperreeller Zahlen durch unendliche Folgen thematisieren will, die sich zwanglos und für Schüler interessant aus der $0,999\ldots = 1$-Frage ergibt. Am Ende läuft dies auf die Äquivalenz von Grenzwert und Standardteil heraus (s. Lingenberg (2019)). In einer Anmerkung zum Schluss dieses Abschnittes gehen wir kurz darauf ein.

Wir stellen jetzt die „Endzustände“ der Veranschaulichungen des Riemann-Integrals im Grenzwert- und infinitesimalen Zugang einander gegenüber:



Integral standard, „Endstation“ 0



Integral standard, „Endstation“ dx

Hier entspricht das Ergebnis im Grenzwertzugang ganz unserer Vorstellung der Fläche unter der Kurve zwischen a und b. Im infinitesimalen Zustand bleibt eine Differenz zu dieser Fläche und in der Tat ist die infinite Summe der infinitesimalen Streifen hyperreell und die reelle Fläche „nur“ der Standardteil. Der gravierende Vorteil im infinitesimalen Zugang, wie sich beim Hauptsatz herausstellen wird, ist, dass die Summendarstellung erhalten bleibt, die im Grenzwertzugang verloren geht. Dort ist der Flächeninhalt ein Grenzwert.

4.4 Differentiationsregeln, Hauptsatz, sin-Ableitung

Für alles weitere in der „Infinitesimalrechnung“ sind die Differentiationsregeln und der Hauptsatz maßgebend.

Dort, wo der Grenzwertformalismus kompliziert, aufwendig und sensibel ist, wird der Vorteil des Rechnens mit Infinitesimalien sichtbar. Wir führen die Einfachheit des Rechnens an der Kettenregel vor. Seien

$y = f(x)$, $z = g(y)$ differenzierbar,

$z = \varphi(x) = g(f(x))$,

$dy = f(x + dx) - f(x)$, $dz = g(y + dy) - g(y)$.

Dann ist für $dx, dy \neq 0$

$\frac{dz}{dy} \approx g'(y)$, $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$.

Aus $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ folgt

- $\varphi'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Die Produktregel kann mit hyperreellen Zahlen schlicht errechnet werden, ohne den üblichen Kunstgriff, den man in der Herleitung mit Grenzwerten braucht.

Seien

$u = f(x)$, $v = g(x)$ differenzierbar,

$z = h(x) = f(x) \cdot g(x) = u \cdot v$,

Wir rechnen wie Bernoulli 1691 (s. Schafheitlin (1924), S.12):

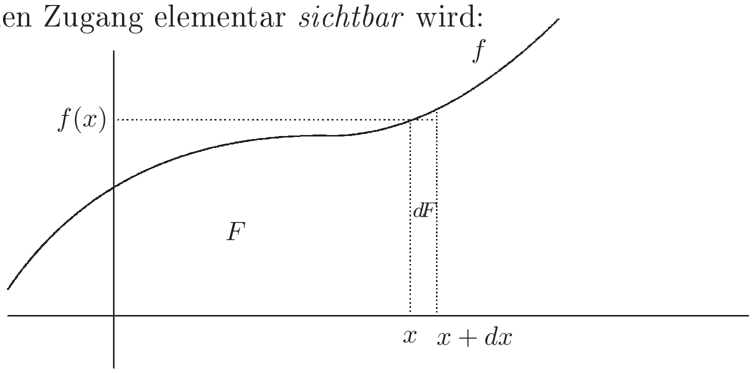
$(u + du) \cdot (v + dv) = u \cdot v + du \cdot v + u \cdot dv + du \cdot dv$.

$dz = (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$, also für $dx \neq 0$

- $h'(x) \approx \frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + du\frac{dv}{dx} \approx f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + du\, g'(x) \approx f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$,

  da $g(x)$ differenzierbar, also $g'(x)$ reell ist.

Eine wesentliche Rolle für alles weitere spielt der *Hauptsatz*, dessen Aussage im infinitesimalen Zugang elementar *sichtbar* wird:



Wir sehen

$dF = F(x + dx) - F(x)$.

Da f im Intervall $[x, x + dx]$ bis auf einen infinitesimalen Fehler konstant ist, ist

$dF \approx f(x) \cdot dx$,

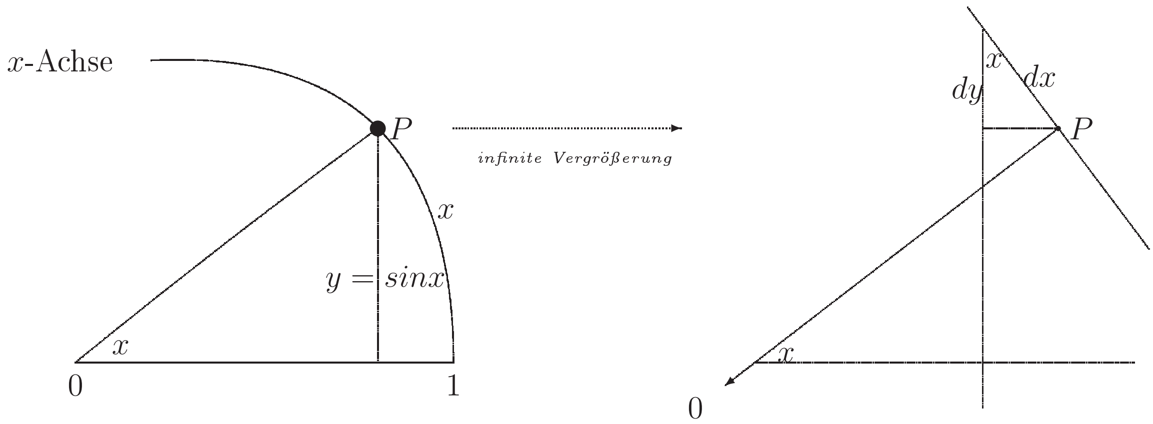
also

- $F'(x) \approx \frac{dF}{dx} \approx f(x)$.

Diese Argumentation finden wir in einer Aufgabenbearbeitung durch einen Schüler im Unterricht von J. Dörr (*Dörr 2015*, S. 46). Eine grundsätzliche arithmetische Vorsicht aber ist geboten, da die Relation $\approx$ bei Division durch infinitesimale Zahlen nicht notwendig erhalten bleibt. Wenn wir näher auf das Rechnen mit hyperreellen Zahlen eingehen, wird das ansprechen. Die Rechnung hier aber ist korrekt, wie man wieder *sieht*: Ist f stetig und $dy = f(x+dx) - f(x)$, so ist das Rechteck $dy \cdot dx$ größer als der infinitesimale Fehler, der Dreiecksinhalt $D = dF - f(x) \cdot dx$. Mit $D < dy \cdot dx$, also $\frac{D}{dx} < dy$ ist $F'(x) \approx \frac{dF}{dx} = \frac{f(x) \cdot dx + D}{dx} \approx f(x)$.

Im Grenzwertzugang ist der Beweis sehr viel schwieriger. Kern des Beweises ist auch dort die „Idee“ ((Behrends (2003), S. 95), die oben schon der Beweis ist, nämlich die Betrachtung von dF. In (Behrends (2003)) z.B. finden wir ein ganz ähnliches Bild wie oben, das Bild 6.25. Hier heißt es, dass dF sich „nur unwesentlich von einem Rechteck mit den Seitenlängen dx und $(f(x)$“ unterscheidet. „Die präzise Ausführung der Idee macht keine großen Schwierigkeiten.“ heißt es dort – und geht dann doch über mehr als eine Seite umständlicher Abschätzungen. In (Behrends (2003)) steht h statt dx und „nur unwesentlich verschieden“ heißt ja soviel wie „$\approx$“.

Als besonderes Beispiel der Effektivität des Infinitesimalen, das man mit der Unendlichkeitslupe sichtbar machen kann, *betrachten* wir die Ableitung der Sinusfunktion. Dieses Beispiel samt Begründung finden wir im Buch (Wunderling (2007), S. 281), die allgemeine mathematische Legitimation gibt Kuhlemann in (Kuhlemann (2017)).



Da in der infiniten Vergrößerung der Kreis lokal gerade wird,

- *sehen* wir: $\sin'(x) \approx \frac{dy}{dx} = \cos(x)$.[7]

4.5 Zur Arithmetik der hyperreellen Zahlen

Die Idee des unendlich Kleinen, des Infinitesimalen, ist im Unterricht schnell da.[8] Nur, was heißt unendlich klein? Das kann man nicht vorgeben, sondern gemeinsam im Unterricht diskutieren und *vereinbaren*. Ein anregender Einstieg können die historischen Postulate von Bernoulli sein, die wir im 1. Abschnitt angegeben haben. Das

> *Postulat 1.*
> *Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.*

[7] vgl. Kuhlemann (2017), S. 3

[8] Ich verweise hier und für das Folgende auf (Dörr (2017)). Neue Unterrichtsversuche in Grundkursen, über die auf der Fortbildung „dx,dy – Einführung in die Analysis ohne Grenzwert“ (ILF Mainz Nr. 19i502001) berichtet wurde, bestätigen dies und die weiteren Hinweise auf die Praxis.

fordert zur Diskussion heraus. Wie ist das gemeint? So kann man es (heute) nicht sagen. Wie dann?

Was wir kennen, ist endlich klein, sehr klein vielleicht, aber wir finden, da wir im Reellen archimedisch denken, immer Kleineres. – An Zahlenbeispielen kann man die Frage demonstrieren. – Was soll dann „unendlich klein“ bedeuten? Auch hier gibt es schnell Vorschläge:

> „Unendlich klein“ ist „kleiner als jede Zahl“.
>
> Eine unendlich kleine Zahl ist kleiner ist als alle bekannten Zahlen.
>
> Eine unendlich kleine Zahl α ist größer als 0, aber kleiner als alle positiven reelle Zahlen r.
>
> α ist infinitesimal, wenn gilt: $\alpha > 0$ und $\alpha < r$ für jedes $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Es geht um Zahlbereichserweiterung (vgl. Dörr (2017), Folien 19 bis 28).

dx ist eine neue Zahl, unendlich klein: dx ist unendlich nah bei 0, und nicht 0, $2x + dx$ ist nicht $2x$, aber $2x + dx$ ist unendlich nah bei $2x$. $2x$ ist der *Standardteil* von $2x + dx$. Das ist die entscheidende Vereinbarung und die zentrale Bezeichnung:

$$dx \approx 0, \ 2x + dx \approx 2x.$$

Diese neue Relation zwischen den neuen Zahlen, speziell zwischen den neuen und alten Zahlen, muss untersucht werden.

Schnell ist klar:

> $\frac{1}{dx} > r$ für jedes $r \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich große Zahlen Ω. Wir schreiben $\Omega \gg 1$

Die neuen Zahlen sollen die unendlich großen, die unendlich kleinen, die alten reellen Zahlen zusammen und dazu alle algebraischen Verknüpfungen untereinander sein. Es entsteht ${}^*\mathbb{R}$, der angeordnete Körper der hyperreellen Zahlen.

Im Folgenden sprechen wir der Kürze halber nur von reellen oder hyperreellen Zahlen, die Null oder größer Null sind.

Ist, wenn dx unendlich klein ist, auch $dx + dx$ unendlich klein? Also: Ist $2dx$ kleiner r für alle r? Klar: Ist irgendeine beliebige reelle Zahl r gegeben, dann ist $2dx < r$, weil $dx < \frac{r}{2}$ ist, da $\frac{r}{2}$ eine reelle Zahl ist. Sind dx und dy unendlich klein, dann ist auch $dx + dy$ unendlich klein. Denn ist z.B. $dy < dx$, dann ist $dx + dy < 2dx$ und $2dx < r$ für alle r, wie eben gezeigt. Die gleiche Argumentation wie für $2dx$ zeigt

$$\text{Ist } a \text{ eine reelle Zahl, dann ist } a \cdot dx < r \text{ für alle } r.$$

Das steht alles schnell da. Für Schüler braucht es dafür dennoch manches Nachdenken, manches schriftliche oder gedankliche Experiment und die Diskussion. In den Folien in (Dörr (2017)) ist das deutlich sichtbar.

Zentral für die Beziehung zwischen alten und neuen Zahlen ist die Eindeutigkeit des Realteils. γ sei eine neue Zahl. Sie soll *beschränkt*, d.h. kleiner als eine reelle Zahl sein. Kann es sein, dass es zwei reelle Zahlen r_1, r_2 mit $\gamma \approx r_1, \gamma \approx r_2$ gibt? Dann wäre $r_1 \approx r_2$, also $r_1 - r_2 \approx 0$ unendlich klein. Dem widerspricht, dass $r_1 - r_2$ eine reell Zahl ist.

Wenn $\alpha \approx \beta \approx \gamma$, z.B. $\alpha + dx = \beta$ und $\beta + dy = \gamma$, dann ist $\alpha + dx + dy = \gamma$, also $\alpha \approx \gamma$. $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

Der Rest dessen, was wir zum Rechnen sagen müssen, ergibt sich aus dem Bestreben, die neuen Zahlen und das alte Rechnen systematisch miteinander zu verbinden. Wir können das in Verknüpfungstafeln darstellen, deren Felder jedoch in manchen Fällen nicht eindeutig belegt werden kann. – Die nicht infinitesimalen und nicht infiniten Zahlen nennen wir endlich oder finit. In den Eingangszeilen und -spalten stehen die Größenordnungen der Zahlen.

$+$	un. klein	endl.	reell	unendl.
un. klein	un. klein	endl.	endl.	unendl.
endl.	endl.	endl.	endl.	unendl.
reell	endl.	endl.	reell	unendl.
unendl.	unendl.	unendl.	unendl.	unendl.

$-$	un. klein	endl.	reell	unendl.
un. klein	un. klein	endl.	endl.	unendl.
endl.	endl.	endl.	endl.	unendl.
reell	endl.	endl.	reell	unendl.
unendl.	unendl.	unendl.	unendl.	

$\cdot$	un. klein	endl.	reell	unendl.
un. klein	un. klein	un. klein	un. klein	
endl.	un. klein	endl.	endl.	unendl.
reell	un. klein	endl.	reell	unendl.
unendl.		unendl	unendl.	unendl.

$:$	un. klein	endlich	reell	unendl.
un. klein		unendl.	unendl.	
endlich	unendl.	endl.	endl.	un. klein
reell	unendl.	endl.	reell	un. klein
unendl.		unendl.	unendl.	

In den nicht ausgefüllten Feldern muss man von Fall zu Fall entscheiden. Es ist z.B. $dx \cdot \frac{1}{dx} = 1$, also eine infinitesimal Zahl mal einer infiniten Zahl eine endliche Zahl. Ist das immer so? Was ist mit $\frac{dx}{dxdy}$ oder $\frac{dxdy}{dx}$? Im Infiniten und zwischen Infinitem und Infinitesimalen treten unterschiedliche Ergebnisse auf.

Im Unterrichtsgang tauchen lokal Fragen des Rechnens auf, die man dort aktuell diskutieren kann. Eine zusammenfassende Klärung der Arithmetik der hyperreellen Zahlen sollte irgendwann sein. Dies, die arithmetische Grundlage zu legen, ist eine interessante und anspruchsvolle Aufgabe, die gemeinsam mit den Schülern bewältigt werden kann.

Nicht adäquat bewältigt wird in der Regel, das sei hier wieder bemerkt, der Grenzwertformalismus, da die Grenzwertsätze im Unterricht auf einen unklare propädeutischen Begriff zurückgeführt werden – und wohl werden müssen, wie wir oben gezeigt haben.

4.6 Ergänzungen

Wo ist eigentlich die $0,999\ldots$ geblieben? Sie führt in eine andere Richtung, in die Anfänge der Konstruktion der hyperreellen Zahlen und auf den Weg vom potentielle ins aktual Unendliche.

Bei der $0,999\ldots$-Frage anzuknüpfen, ist interessant. Denn man „sieht" quasi, dass es unendlich Kleines gibt. Die Frage, ob $0,999\ldots$ kleiner oder gleich 1 ist, ist für Schüler in der 11. Klasse längst nicht entschieden, selbst wenn sie „$0,999\ldots = 1$ mal gelernt" haben. Für den Lehrer ist es interessant, weil er es vielleicht war, von dem sie es „mal gelernt" haben. Er muss gestehen, dass es auch anders sein kann, wie es anders sein kann, dass man anders rechnen kann, dass $0,999\ldots < 1$ *und* $0,999\ldots = 1$ ist – und beides Theorie. Letzteres muss man gar nicht sagen, da es klar wird: Mathematik ist, wie ein Schüler oben schon argumentierte, nicht die Wirklichkeit, da sie so und anders sein kann. Genau hier setzte ihr Unterricht an und hierüber berichteten Christine Hahn und Volkhardt Fuhrmann (Speyer) in einer Lehrerfortbildung 2019 (ILF Mainz, Nr. 19i502001).

Wie groß könnte der Unterschied zwischen $0,999\ldots$ und 1 sein? „Unendlich klein." Das haben wir oben schon gehört, von der $<$- wie von der $=$-Fraktion – und man wird es im Unterricht garantiert hören. Aber wie groß genau?

Dazu gehört nun die genauere Diskussion. Was ist denn $0,999\ldots$? Was heißt es, $0,999\ldots$

mit 1 zu vergleichen? Wie groß ist die Differenz? Ist sie unendlich klein? Was heißt „unendlich klein“?

4.6.1 $\mathbf{0,999\ldots < 1.}$

Was ist $0,999\ldots$? Gab es schon Folgen und Reihen im Unterricht? Wenn nicht, dann ist hier ein Ansatzpunkt.

Was heißt es, $0,999\ldots$ mit 1 zu vergleichen? „Da man aber unendlich viele 9er Stellen hintendran stellen kann, ist diese Zahl immer kleiner als 1.“, sagt ein Schüler. Bei jedem „Hintendran-Stellen“ machen wir im Prinzip den Vergleich. $0,999\ldots$ mit 1 zu vergleichen, heißt:

$$0,9 \text{ mit } 1, \text{ dann } 0,99 \text{ mit } 1, \text{ dann } 0,999 \text{ mit } 1; \ldots \text{zu vergleichen,}$$

also eine unendliche Folge von Vergleichen anzustellen. Wir vergleichen zwei unendliche Folgen

$$(0,9; 0,99; 0,999; \ldots) \text{ und } (1; 1; 1; \ldots).$$

Da

$$0,9 < 1; \quad 0,99 < 1; \quad 0,999 < 1; \quad \ldots,$$

also jedes Glied der ersten Folge kleiner ist als das entsprechende Glied der zweiten Folge, ist in natürlicher Weise

$$(0,9; 0,99; 0,999; \ldots) < (1; 1; 1; \ldots).$$

Die erste Folge der Partialsummen ist $0,999\ldots$, (1;1;1; ...) eine besondere Schreibweise für 1.

- Also gilt $0,999\ldots < 1$.

Diese Art von Vergleich führt genauso zum Ergebnis $0,333\ldots < \frac{1}{3}$.

Hier tritt das Problem der unendlichen Folgen, der Unendlichkeit, auf und gibt den Anlass, explizit zu machen, was man immer schon unausgesprochen tut. Man verwendet unendliche Dezimalbrüche, periodisch und nichtperiodisch, man spricht über $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Hier operiert man mit unendlichen Folgen und verwendet sie als mathematische Objekte, so, als wenn sie fertig, abgeschlossen wären. Aus der potentiell unendlichen Folge

$$(0,9; 0,99; 0,999; \ldots \text{ wird die aktual unendliche Folge } (0,9; 0,99; 0,999; \ldots \Big)$$

, die man mit $\Big)$ abschließt. Englisch schreibt man „ehrlicher“ und allgemein für Folgen:

$$\{a_1; a_2; a_3; \ldots \}.$$

Es ist paradox, aber man kommt nicht daran vorbei, so zu denken Die Pünktchen „...“ sagen, dass es immer so weiter geht, ohne Ende. $\}$ oder $\Big)$ setzt das Ende.

Nicht so denken kann man übrigens, wenn wir über unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche sprechen, etwa über $\sqrt{2} = 1,1414213\ldots$. Was sagen die Pünktchen „...“ dann? *Nicht*periodisch sagt: „*nicht* so weiter“ und das ohne Ende. In (Bedürftig (2018), im Punkt 4.3) wird dieser „Kunstgriff“ diskutiert, der das Denken (nicht nur) der Schüler überfordert und ignoriert.

Notwendig, wenn es nicht schon viel früher im Unterricht geschehen ist, wird das Bewusstsein, dass wir mit unendlichen Mengen zu tun haben, wenn wir jetzt beginnen, mit Folgen zu rechnen.

4.6.2 Was ist $\alpha = 1 - 0,999\ldots$!

„$1 - 0,999\ldots$“ heißt „$(1;1;1;\ldots) - (0,9;0,99;0,999;\ldots)$“. Wir rechnen:

$$\begin{array}{rlllll} & (1,0; & 1,00; & 1,000; & 1,0000; & \ldots) \\ - & (0,9; & 0,99; & 0,999; & 0,9999; & \ldots) \\ \hline & (0,1; & 0,01; & 0,001; & 0,0001; & \ldots). \end{array}$$

Das ist die Folge

$$(\tfrac{1}{10}; \quad \tfrac{1}{100}; \quad \tfrac{1}{1000}; \quad \tfrac{1}{10000}; \quad \ldots).$$

Ergebnis:

$$\alpha = 1 - 0,999... = (0,1;0,01;0,001;\ldots) = (\tfrac{1}{10};\tfrac{1}{10^2};\tfrac{1}{10^3};\ldots).$$

Wir sehen: Wir können α nicht als unendliche Dezimalzahl schreiben. α ist eine neue, nicht reelle, Zahl.

4.6.3 Wie groß ist α?

Zuerst:

Es ist $\alpha > 0$, da

$(0,1;0,01;0,001;\ldots) > (0;0;0;\ldots)$.

Denn jede Stelle der ersten Folge ist größer als jede der zweiten.

Und:

α ist unendlich klein.

Was soll das heißen?

Es geht darum, Vorstellungen zu äußern und mathematisch zu formulieren. Es wird darauf hinauslaufen: Unendlich klein heißt „Kleiner als jede Zahl.“ Genauer: „Kleiner als jede bisherige Zahl.“ Es geht ja um neue Zahlen.

„Kleiner als jede Zahl, die wir uns ausdenken können.“ So begründet A. Beutelspacher in ([?], Frage 61) die „Tatsache“ $0,999\ldots = 1$. Mathematisch ausgedrückt und allgemein für Folgen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ (|1 - a_n| < \varepsilon)$. Das ist das klassische Grenzwertargument, das das unendlich Kleine heute noch weitgehend eliminiert, Cauchy und Weierstraß aber nicht hinderte, eben dies zugleich zu denken.

Hier liegt die Herausforderung, nicht für Schüler, aber für uns und unsere Grenzwertbiographien. Wir denken uns nicht nur eine Zahl aus, sondern wir haben sie „gesehen“: α. Sie unterläuft jedes reelle ϵ, „das wir uns ausdenken können“. Das ist – noch – Behauptung.

Damit ist klar, was unendlich klein heißen soll:

$$\alpha \text{ ist unendlich klein, wenn } \alpha < \epsilon \text{ für alle reellen } \epsilon > 0 \text{ ist.}$$

Oder

$$\alpha \text{ ist unendlich klein, wenn } \alpha < \tfrac{1}{10^n} \text{ für alle natürlichen Zahlen } n \text{ ist.}$$

Wie beweisen wir das?

$\alpha < \frac{1}{10}$,

da $(\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; \ldots) < (\frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \ldots)$.

Denn bis auf das erste sind alle Folgenglieder der ersten Folge kleiner als die entsprechenden der zweiten Folge.

$\alpha < \frac{1}{10^2}$,

da $(\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; \ldots) < (\frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^2}; \ldots)$.

Denn bis auf die ersten beiden sind alle Folgenglieder der ersten Folge kleiner als die entsprechenden der zweiten Folge.

$\alpha < \frac{1}{10^3}$,

da $(\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; \ldots) < (\frac{1}{10^3}; \frac{1}{10^3}; \frac{1}{10^3}; \ldots)$.

Denn bis auf die ersten drei sind alle Folgenglieder der ersten Folge kleiner als die entsprechenden der zweiten Folge. usw. usf. .... Also

$\alpha < \frac{1}{10^i}$ für jedes feste i,

da $(\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \ldots \frac{1}{10^i}; \frac{1}{10^{i+1}}; \ldots) < (\frac{1}{10^i}; \frac{1}{10^i}; \frac{1}{10^i}; \ldots)$.

Denn bis auf die ersten i sind alle Folgenglieder der ersten Folge kleiner als die entsprechenden der zweiten Folge.

Ergebnis: Nicht alle, aber *fast alle* Folgenglieder von α sind kleiner. Das ist der Ansatz einer Definition der <-Relation in der Konstruktion der hyperreellen Zahlen über Folgen reeller Zahlen (s. Laugwitz (1986), Kap. 2). α "unterläuft" quasi jede negative Zehnerpotenz. Hier liegt die anschauliche Motivation, die diese theoretische Festlegung nahelegt.

Wir geben noch zwei Beispiele aus der Konstruktion und rechnen ein wenig, verfolgen diesen Weg aber nicht weiter, auf den wir durch unsere $0,999\ldots$ Frage geführt wurden.

4.6.4 Wie rechnet man?

Auch

$\omega = (\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots)$

ist unendlich klein. Die Argumentation ist analog zu der für α.

Hier wird die Herausforderung für den Standardmathematiker überdeutlich. Die Nullfolge unter den Nullfolgen – $(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots) = (\frac{1}{n}$ – ist keine Nullfolge mehr, und mit ihr „fast alle" Nullfolgen.

Neben den unendlich kleinen Zahlen gibt es unendlich große Zahlen.

- $\Omega = (1; 2; 3; \ldots)$ ist unendlich groß,

denn offenbar ist $(1; 2; 3; \ldots) > (n; n; n; \ldots)$ für jedes n – die nächste, aber gleiche Herausforderung: Die Archimedizität ist aufgehoben.

Wenn man vernünftig festlegt, wie dividiert wird – jedes Glied der Dividenden-Folge durch das entsprechende Glied der Divisor-Folge –, ist klar:

$\omega = \frac{1}{\Omega}$.

Auch im Bereich des unendlich Kleinen und Großen können wir Zahlen vergleichen. Es ist z.B.

$$\alpha < \omega,$$

oder

$$(1; 2; 3; \ldots) = \Omega < \Omega + 1 = (2; 3; 4; \ldots),$$

wie man sofort sieht, wenn man die zugehörigen Folgen hinschreibt.

Und noch eine Übung: Was ist das arithmetische Mittel

Schließlich berechnen wir das arithmetische Mittel von $0,999\ldots$ und 1:

$$\frac{0{,}999\ldots + 1}{2}$$

berechnen. Es ist

$$\begin{array}{rlllll} & (0,9; & 0,99; & 0,999; & 0,9999; & \ldots) \\ + & (1,0; & 1,00; & 1,000; & 1,0000; & \ldots) \\ \hline & (1,9; & 1,99; & 1,999; & 1,9999; & \ldots). \end{array}$$

Weiter ist

$$\frac{0{,}999\ldots + 1}{2} = (1,9; 1,99; 1,999; \ldots) : (2; 2; 2; \ldots) =$$
$$(1,9 : 2; 1,99 : 2; 1,999 : 2; \ldots) = (0,95; 0,995; 0,9995; \ldots).$$

Wir stellen fest

- $0,999\ldots < (0,95; 0,995; 0,9995; \ldots) < 1$

und bemerken, dass im Bereich der hyperreellen Zahlen feiner unterschieden wird – über das Messbare hinaus. Zwischen $0,999\ldots$ und 1 liegen unendlich viele hyperreelle Zahlen.

Abschließend bemerken wir, dass wir im Schreiben etwas großzügig waren. Wir haben mit Folgen gerechnet, und die Ergebnisse sind auch alle korrekt. Eigentlich aber hätten wir mit Klassen von Folgen rechnen müssen. Unsere Folgen oben repräsentieren diese Klassen. Im Bereich der reellen Zahlen geht man übrigens nicht anders vor, wenn man etwa $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ wirklich beweisen will. Man wählt Repräsentanten und zeigt die Repräsentantenunabhängigkeit.

Wir bemerken noch, ohne es auszuführen, dass in dem Rechnen mit Folgen immer auch die Grenzwerte im Gepäck sind. Die Folgen, besser die Klassen von Folgen, sind in der Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ hyperreelle Zahlen. Ihr Realteil sind die Grenzwerte dieser Folgen. Nehmen wir das simple Beispiel $0,999\ldots$, d.h. die Folge $(0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots)$. Sie repräsentiert eine hyperreelle Zahl. Ihr Realteil ist 1, der Grenzwert der Folge $(0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; \ldots)$. Wilfried Lingenberg stellt den Zusammenhang zwischen Realteil und Grenzwert in (Lingenberg (2019)) systematisch dar.

Der Zusammenhang bietet die Chance, Grenzwertsätze elementar zu beweisen, die sonst erheblichen Aufwand und komplizierte ε-δ-Abschätzungen erfordern. Beispiel:

> Wenn (a_n) gegen $a \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert $(\frac{1}{a_n})$ gegen $\frac{1}{a}$.
>
> Wenn (a_n) gegen a konvergiert, repräsentiert (a_n) eine endliche hyperreelle Zahl $a + \alpha \approx a$ mit infinitesimalem α.
>
> Wir rechnen: $(\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{(a_n)}$. Also ist $\frac{1}{(a_n)} = \frac{1}{a+\alpha} \approx \frac{1}{a}$.
>
> Denn $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\alpha} = \frac{\alpha}{a^2+a\alpha} \approx 0$.

Wir beschreiben den Weg in die Konstruktion der hyperreellen Zahlen nicht weiter und verweisen auf (Bedürftig/Murawski (2019, Kap. 6). Wir brauchen diese Konstruktion im Unterricht auch nicht, ebenso wenig, wie man die Konstruktion der reellen Zahlen braucht. Aber ein kleiner Einblick wie der vorgestellte, ausgehend von der $0,999\ldots$-Frage, kann reizvoll sein und effektiv für die Idee des unendlich Kleinen, des unendlich Großen des aktual Unendlichen – und nicht zuletzt für die Idee des Grenzwertes.

4.7 Kurze Bilanz

Wir haben nur Andeutungen machen können und wollen dennoch versuchen, eine didaktische Bilanz für den arithmetischen Zugang in die Anfänge der Analysis zu ziehen – im Vergleich mit dem Grenzwerteinstieg. Wir haben in einigen Stationen Vergleiche schon angestellt und bemerken noch einmal, dass wir dafür plädieren, Grenzwerte und Infinitesimalien zuzulassen. Auch wenn sich die Wahl der Schüler zu der Seite der Infinitesimalien neigen sollte, was ich für naheliegend halte, wird der „propädeutische Grenzwertbegriff" zumindest eine Stärkung erfahren.

Das hyperreelle Rechnen nicht zu lehren, sondern zu entwickeln, zu vereinbaren und zu lernen, ist sicherlich aufwendiger, als mit einem propädeutischen Grenzwertbegriff einzusteigen, der kein Begriff ist, sondern auf unklare Intuitionen und Beschreibungen baut. Dafür bietet das Rechnen mit den neuen, den hyperreellen Zahlen eine sichere und anschauliche Grundlage für alles weitere.

Das neue Rechnen ist ein interessantes Thema im Unterricht, das die Schüler weitgehend mitgestalten und diskutieren können. Sie erfinden selbst eine Theorie und verwenden sie, um Änderungsraten, Steigungen, Flächeninhalte und Bilanzen zu erkunden. Sie steigen mit einem selbstgemachten, daher nachhaltigeren Rüstzeug in die Anfänge der Analysis ein. Die technischen Vorteile dieses Einstiegs sind unübersehbar, wenn wir an die Differentiationsregeln und den Hauptsatz denken. Wesentlich ist, dass das Rechnen durchgehend von einer Anschauung begleitet werden kann – aber nicht muss. Die lehrreiche, aber komplizierte Anschauung etwa bei Differentiationsregeln (s. Wunderling (2007)) kann durch einfaches Rechnen abgelöst werden.

Die Anschauung, die auch genauso am Anfang des Grenzwertzugangs steht, löst sich jedoch im Prozess der Grenzwertbildung auf und geht so als Hintergrund für die Begriffe weitgehend verloren. Die Grenzwertsätze bleiben so propädeutisch wie der Grenzwertbegriff selbst. Die Ableitungen von Regeln der Differentiation laufen Gefahr, zum reinen, unverstandenen Formalismus zu werden.

Diesem Vergleich wird sich niemand wirklich verschließen können. Dennoch gibt es Gegenstimmen, die an dem Grenzwertzugang festhalten.

In der Diskussion sieht es oft so aus, als ob es *entweder* um Infinitesimalien *oder* Grenzwerte ginge. Es geht *nicht* um einen „geeigneten Ersatz" (Hischer (2017), S. 35), *nicht* um den „Verzicht auf den Grenzwert?", nicht um „Grenzwert vs. Nonstandardanalysis?" oder „Reelle Zahlen vs. hyperreelle Zahlen?", so die Absatzüberschriften in (Hischer (2017), S. 32 –35). Damit fällt die Argumentation in sich zusammen – ganz abgesehen von Unterstellungen und sachlichen Fehlern. Horst Hischer schreibt z.B.: „Die ‚hyperreellen Zahlen' bestehen aus allen finiten (also reellen) und allen infinitesimalen und infiniten Zahlen." Das ist fundamental falsch: Die finiten Zahlen sind *nicht* die reellen. Es zeigt, dass der Autor erste einfache Dinge über die hyperreellen Zahlen nicht weiß. Er ist nicht qualifiziert, etwas Relevantes über den infinitesimalen Zugang zu sagen.[9] Es geht auch nicht um „Ideenrettung" (Hischer (2017), S. 35), da die Idee des Grenzwertes durch Infinitesimalien gar nicht gefährdet ist. Das Gegenteil ist der Fall: Der Grenzwertbegriff kann, wie wir sahen, eine Stärkung erfahren durch den neuen Aspekt des Realteils in den hyperreellen Zahlen. Im schon zitierten Aufsatz (Lingenberg (2018)) lesen wir über die Äquivalenz von Realteil und Grenzwert – unter dem Gesichtspunkt der Konstruktion der hyperreellen Zahlen aus reellen Zahlenfolgen.

Wir haben gesehen, wie Infinitesimalien und Grenzwerte historisch lange Zeit miteinander verbunden waren. Manche Formulierungen historischer Mathematiker wie Leibniz, Cauchy und Weierstraß erinnern an die propädeutisch formulierten Grenzwerte im heutigen Unterricht. Wir können nicht erwarten, dass Schüler Infinitesimalien und Grenzwerte gleich begrifflich trennen können. Mathematische Logik und Mengenlehre gab es damals in der Mathematik nicht und gibt es heute in der Schulmathematik nicht. Eine Unterscheidung in der Schule ist daher nicht möglich. Man muss und kann, und das ist eine **Chance**, mit beidem rechnen – im doppeltem Sinne.

5 Schluss

Was bringt Nichtstandard? Warum soll man die Seiten wechseln?

Warum Nonstandard?

Es geht nicht darum, die Seite zu wechseln. Es geht darum, Nonstandard einzubeziehen, Standard um Nonstandard zu erweitern. Wir haben im Elementaren gesehen, wie effektiv das sein kann. Der Einstieg in die Analysis kann anders werden. Er muss nicht durch die offenbaren Schwierigkeiten mit den Grenzwerten belastet sein. Grenzwerte, die man aus Gründen der Vorbereitung auf das Studium und der in Grenzwerten geschriebenen Analysis nicht erübrigen kann, bekommen in den Infinitesimalien ein Gegenüber – etwa so, wie wir die Nachbarschaft, ja Verwandtschaft von beiden historisch beobachtet haben.

In der Einführung des Integrals ist das im Wechsel vom verschwindenden Δx zum unendlich kleinen dx sehr deutlich. Der Differentialquotient hält den Grenzwertprozess der Differenzenquotienten quasi an. Steigungen können nicht mehr nur als Grenzwerte „in der Ferne " erahnt werden, sie sind wieder Verhältnisse von – unendlich kleinen – Seiten. Das Integral kann wieder als Summe begriffen werden. Der Hauptsatz liegt „auf der Hand". Die Anschaulichkeit ist wieder da, das Verständnis, das oft in Grenzwertprozessen verschwindet, bekommt eine neue Chance. Der abstrakte Grenzwertformalismus erhält einen arithmetischen und anschaulichen Nachbarn. Differentiationsregeln müssen nicht mehr künstlich über die Hürde der Grenzwertsätze springen. Sie werden arithmetisch ausgerechnet.

[9]Weitere Beispiele: Hischer äußert die abwegige Vermutung: „Der Basisartikel (Baumann und Kirski 2016) mag vielleicht zunächst den Eindruck erwecken, dass die Autoren für eine Behandlung der hyperreellen Zahlen im Unterricht anstelle der reellen Zahlen plädieren, [...]" (Hischer (2017), S. 35) Oder: Der Autor hält offenbar, das zeigt eine Klammerbemerkung, weiterhin die „reellen Zahlen" für eine „eine die Zahlengerade füllende Punktmenge" (Hischer (2017), S. 35). Die Körpererweiterungen, die er nennt und zeigen sollen, dass „mit den reellen Zahlen nicht Schluss ist", haben, anders als die hyperreellen Zahlen, mit der Zahlengeraden nichts zu tun.

Nicht übersehen werden darf, dass es natürlich gilt, die Anschauung und die Arithmetik der infinitesimalen und infiniten Zahlen, der hyperreellen Zahlen aufzubauen. Dieser Aufbau darf nicht einfach axiomatisch gesetzt, sondern muss gemeinsam im Unterricht gefunden, besser: theoretisch erfunden werden. Das richtig zu tun und methodisch zu entwickeln, ist eine Aufgabe für die Mathematik-Didaktik. Hier in diesem Text konnten und sollten nur arithmetische Details sichtbar werden.

Die mathematischen Vorzüge von Nonstandard liegen auf der Hand. Denn Nonstandard ist eine echte Erweiterung von Standard. Über der reellen Arithmetik erhebt sich nicht nur die Struktur $\mathbb{R}$, sondern auch ${}^*\mathbb{R}$. Das Angebot ${}^*\mathbb{R}$ kann man mathematisch nicht ausschlagen. Hyperreelle Zahlen ergänzen die Standardinstrumente und öffnen die Tür zu einem neuen mathematischen Raum.

Infinitesimalien und infinite Zahlen vertiefen und erweitern die mathematische Anschauung. Historisch haben wir vermutet, dass der Aspekt der Anschauung eine wesentliche Kraft in der Entwicklung der Analysis im 18. Jahrhundert war. Auch heute ist dieser Aspekt nicht zu unterschätzen. Er war und ist eine wesentliche Quelle mathematischer Inspiration.

Nonstandard erweitert und vertieft das mathematische Denken. Das unendlich Kleine, ein traditionelles, effektives Element des mathematischen Denkens entsteht neu. Nonstandard hebt mathematische Festlegungen auf, die uns manchmal nicht bewusst sind. Die Zahlengerade ist ein Beispiel dafür. Sie ist die Identifikation von Zahlen und Punkten, von $\mathbb{R}$ und Gerade, von Arithmetik und Geometrie. Nonstandard befreit das lineare Kontinuum von der „Besetzung“ durch Zahlen. Die Zahlengerade wird wieder zum offenen Medium der Veranschaulichung von Zahlen, auch der hyperreellen Zahlen, als Punkte. Das Kontinuum ist „real“ keine Punktmenge mehr. Setzt man $\mathbb{R}$ oder ${}^*\mathbb{R}$ als Modell der Geraden, so ist sie nur theoretisch – und vorübergehend – eine Zahlen- und Punktmenge.

Widerstände

Wieso, wenn alles so überzeugend ist, macht man Nichtstandard nicht schon längst? Man muss unterscheiden: In der mathematischen Forschung wird schon lange nonstandard gearbeitet – von Spezialisten. Von „allgemeinen“ Mathematikern, Dozenten und Lehrern jedoch wird Nonstandard kaum wahrgenommen oder nicht ernstgenommen. Es scheint vielmehr Widerstand zu geben. Ich vermute knapp einige Gründe – erinnere aber an die „Prophetie“ im Motto dieses Aufsatzes, die wie für die Geschichtsschreibung auch eine Eigenschaft jeder, also auch des folgenden Versuchs einer Gegenwartsbeschreibung ist.

Nonstandard wird oft als nur logische Erscheinung wahrgenommen, da sie in logisch aufgefundenen Nichtstandardmodellen stattfindet. Logik genießt unter Mathematikern eine eher distanzierte Anerkennung. Man lässt gern „die Finger davon“. Ein Beispiel lesen wir in (Behrends (2003)), S. 76).

> „Es gibt einen aus der Modelltheorie entstandenen und vor einigen Jahrzehnten viel diskutierten alternativen Zugang zur Analysis, in dem die ‚unendlich kleinen Größen‘ ein Comeback erleben (die Nonstandard-Analysis). Hauptvorteil ist, dass man endlich ‚versteht‘, was Leibniz und den anderen wohl vorgeschwebt haben könnte, außerdem kommt man viel schneller zu den Hauptsätzen der Analysis.“

Über die Diktion hier sehen wir hinweg. Der letzte Teilsatz immerhin ist doch bemerkenswert. Gleich danach schränkt er aber ein:

> „Dabei muss man sich allerdings, wenn man alles so streng wie allgemein üblich entwickeln möchte, sehr ausführlich mit sehr verzwickten Teilen der Modelltheorie beschäftigen, und deswegen spricht einiges dafür, dass diese Variante der Analysis nur eine Episode bleiben wird."

„So streng wie allgemein üblich" ist nicht wirklich streng, wie K. Kuhlemann (2018b) analysiert. Ist man streng, so zeigt sich, dass die infinitesimalen und infiniten Zahlen nicht ausgeschlossen, sondern nur verborgen sind und sichtbar gemacht werden können.[10] Selbst wenn etwas modelltheoretisch nachgewiesen wird, ist es nicht nötig, Modelltheorie zu betreiben, wenn man fundiert arbeiten will. Das Arbeiten im Modell braucht weder Konstruktion noch Modelltheorie (vgl. Bedürftig/Murawski (2015), A.5). Es ist befremdlich, wie hier, ohne den mathematischen Stoff ausreichend zu kennen, Urteile gefällt werden.

Zuvor (S. 75) schon hatte der Autor den Darwinismus zitiert, der in der Mathematik wie in der Natur die Evolution am Werke sieht, in der durch natürliche Auslese die gute Mathematik überlebt und die schlechte eine „Episode" sein lässt. Wir bemerken, dass es hier gar nicht um eine andere Mathematik geht, sondern um ihre Erweiterung. Und wir merken weiter an, dass Auslese in der Mathematik oft weniger mathematisch als von Mathematikern gesteuert wird.

Logik ist unbequem. Ergebnisse aus der Logik über Unvollständigkeit, Widerspruchsfreiheit, Axiomatisierbarkeit, Entscheidbarkeit usw. sind berühmt, aber irrelevant für die mathematische Praxis. Unabhängigkeitsresultate wie für das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese sind unangenehm – verunsichern aber nur vorübergehend ein wenig. Hierher, in die Unabhängigkeit von den Grundlagen und damit von der Mathematik, gehört auch die Entscheidung für Nonstandard, die man vielleicht *fälschlich* als Entscheidung **gegen** Standard auffasst. Nonstandard **und** Standard scheint paradox zu sein. Also beschränkt man sich: auf Standard.

Aus der Mengenlehre kommen quasi „Glaubenssätze", die ins mathematische Fleisch und Blut übergegangen zu sein scheinen. Wir haben es oben als Fortschritt dargestellt, das Kontinuum nicht mehr prinzipiell als Punktmenge aufzufassen. Die Punktmengenauffassung aber scheint tief im Unbewussten zu sitzen. Die Zahlengerade, Indiz dafür, ist alltägliches, scheinbar unverzichtbares Instrument. Unsere Grenzwertmathematik überzeugt uns, dass $0,999\ldots = 1$ ist und Achilles die Schildkröte überholt. Klassische Nullfolgen sind nicht Null. Punkte sind objektiv und ausdehnungslos. In ihnen ruht der Pfeil. All das müsste man in Frage stellen. – Über solche und verwandte Probleme wird in Bedürftig (2015), und Bedürftig/Murawski (2017) berichtet.

Kurz: Die Erweiterung durch Nonstandard untergräbt Grundvorstellungen, die oft nicht bewusst sind. Entsprechend „allergisch" fällt häufig die Abwehr aus.

Weitere Anmerkungen

Ist die Wiederkehr der Infinitesimalien wirklich ein Zurück, zurück ins 17. und 18. Jahrhundert?

- Gedanklich, anschaulich: Ja!

[10] K. Kuhlemann prüft in (Kuhlemann (2018b) die Strenge des Vorgehens in Analysis I-Lehrbüchern (incl. Behrends (2003)).

- Mathematisch: Nein!

Infinitesimalien, die einst Größen waren, sind heute Zahlen. Ihre Grundlage sind die heutigen Mathematischen Grundlagen, Mengenlehre und Logik. Mit modernen Methoden führen sie über die reellen Zahlen hinaus in ein neues mathematisches Denken hinein. „Nichtstandard" bedeutet längst nicht mehr „nicht Standard".

Ich merke an, dass das, was ich aus der Praxis der wirklichen Infinitesimalrechnung vorgestellt habe, keine Prognose potentiellen Unterrichts ist. Diese Dinge gibt es seit langem real, auch in Deutschland. Die Autoren Wunderling, Baumann und Kirski veröffentlichen seit 20 Jahren über diesen Ansatz, den sie im Unterricht erprobten und erproben. Im Jahr 2007 publizierten sie ein *Schulbuch* „Analysis als Infinitesimalrechnung" (*Wunderling* 2007), ein umfassendes Buch für engagierte Lehrer, das nicht in den Rahmen der Richtlinien passte und daher keine Verbreitung fand. Im Frühjahr 2018 wird eine überarbeitete Fassung bei Springer erscheinen.

Jochen Dörr (Speyer), Christian Kauferstein (Linz am Rhein), Karl Kuhlemann (Hannover) und ich arbeiten seit 2014 in *Lehrerfortbildungen* an diesem Thema. In den drei letzten Jahren ist diese Arbeit, die philosophisch begann, praktisch geworden. Jochen Dörr hat seinen Einstieg in die Analysis aus dem Jahr 2015 *dokumentiert* (Dörr (2017)). Aus einer Fortbildung im Juni 2017 ist eine *Mind Map* entstanden (Ludes (2017)), die Stefanie Ludes vom Institut für Lehrerfortbildung in Mainz erstellt hat. Es gab neue erfolgreiche Unterrichtsversuche, die in einer Lehrerfortbildung (ILF Mainz Nr. 19i502001) vorgestellt und diskutiert wurden. Unser Konzept ist, Infinitesimalien und Grenzwerte parallel zu thematisieren. Auch wenn eine grenzwertfreie Analysis möglich ist, die Analysis ist seit 150 Jahren in Grenzwerten geschrieben.

Ich spreche ein „vorwärtsgewandtes"

Schlusswort.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind fast 150 Jahre alt. Es geht nicht um die Ablösung durch die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ ist der Ausgangs- und Bezugspunkt.

- Es geht mathematisch um die überfällige Erweiterung der reellen Arithmetik und um die Erweiterung der mathematischen Instrumente.
- Es geht didaktisch um eine Alternative und Ergänzung im Mathematikunterricht, die die Probleme der Grenzwerte arithmetisch vermeiden kann.

Was hier aufgeschrieben ist, ist ein weiter, vielfältiger Überblick. Didaktische und methodische Ideen und Argumente waren nur angedeutet. Ich habe die Herkunft, die Umgebung und den Kern eines mathematischen „Stoffes" vorgestellt, der nach intensiver *Stoffdidaktik* ruft.

Standard braucht Nonstandard.

Literatur

Aristoteles (1829). *Physik.* Deutsch: C.H. Weiße, Leipzig 1829.

Bauer, L. (2011). *Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu* $0,\overline{9}$. J. für Mathematikdidaktik 32, 79–102.

Baumann, P.; Kirski, Th. (2016): *Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Mitteilungen der GDM 100 (2016), 6–16.

Becker, O. (1964). *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg-München 1964.

Becker, O. (Hrsg.) (1965). *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Darmstadt 1965.

Bedürftig, Th. (2015). *Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Band 5, 1–21.

Bedürftig, Th.; Murawski, R. (2015). *Philosophie der Mathematik* (3. erw. Auflage). Berlin 2015.

Bedürftig, Th.; Murawski, R. (2017). *Historische und philosophische Notizen über das Kontinuum*, Mathematische Semesterberichte 64 (2017), 63–88.

Behrends, E. (2003). *Analysis I*. Braunschweig/Wiesbaden 2003.

Breger, H. (2009): *Vom Binärsystem zum Kontinuum – Leiniz Mathematik*. In Reydon (2009), 123–135.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932.

Cigler, J. (1992). *Grundideen der Mathematik*. Mannheim 1992.

Dauben, J. W. (1995). *Abraham Robinson – The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*. Princeton, New Jersey.

Dörr, J. (2017): *Analysis mit hyperreellen Zahlen – Unterrichtspraktische Erfahrungen aus einem Leistungskurs*. Speyer 2017, https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien_Unterrichtsversuch_VA zugegriffen: 18.04.2018.

Hilbert, D. (1999). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart 1968 (11. Auflage).

Hilbert, D. (1925). *Über das Unendliche*. Math. Annalen 95 (1925), 161–190.

Hischer, H. (2017). „Grenzwertfreie Analysis“ in der Schule via „Nonstandard Analysis“?, Mitteilungen der GDM 103 (2017); 31–36.

Jahnke, H.N. (Hrsg.) (1999). *Geschichte der Analysis*, Heidelberg Berlin 1999.

Knobloch, E. (Hrsg.) (2016). *Gottfried Wilhelm Leibniz: De quadratura arithmetica circuli elipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Berlin Heidelberg 2016.

Kuhlemann, K. (2018a): *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Bd. 10 (2018), 47–66. S. auch https://www.karlkuhlemann.net/start/forschung/ .

K. Kuhlemann (2018b): *Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Bd. 10 (2018), 67–106. S. auch https://www.karlkuhlemann.net/start/forschung/ Landers, D.; Rogge, L. (1994). *Nichtstandard Analysis*. Berlin Heidelberg 1994.

Laugwitz, D. (1978). *Infinitesimalkalkül – Eine elementare Einführung in die Nichstandard-Analysis*. Zürich 1978.

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum*. Mannheim; Wien; Zürich 1986.

Leibniz, G. W. (1971): *Mathematische Schriften.* Hrsg. C. J. Gerhardt, Nachdruck Hildesheim 1971.

Ludes, S. (2017): dx, dy – *Einstieg in die Analysis ohne Grenzwerte*, Mind Map. Mainz 2017.

Meschkowski, H. (1966). *Aus den Briefbüchern Georg Cantors.* Archive for History of Exact Sci. 2 (1962-1966), 503–519.

Reydon, A.C.; H. Heit; P. Hoyningen (Hg.) (2009): *Der universale Leibniz – Denker, Forscher, Erfinder*. Franz Steiner Verlag, Stuttgart 2009.

Robinson, A. (1961). *Non-standard Analysis.* Indag. Math. 23 (1961), 432–440.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis.* Amsterdam 1966.

Schafheitlin, Paul (Hrsg.) (1924): *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.* - Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1924.

Schmieden, C.; Laugwitz, D. (1958). *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung.* Math. Zeitschrift 69, 1–39.

Schneider, I. (1979). *Archimedes.* Darmstadt 1979.

Seek, G. A. (Hrsg.) (1975). *Die Naturphilosophie des Aristoteles.* Darmstadt 1975.

Sonar, Th. (2016): *Vertreibung der Gespenster.* Spektrum der Wissenschaft 7 (2016), 60–66.

Thiel, Chr. (Hrsg.) (1982). *Erkenntnistheoretische Grundlagen der Mathematik.* Hildesheim 1982.

Väth, Martin (2007). *Nonstandard Analysis.* Basel 2007.

Wieland, W. (1962). *Das Kontinuum in der Aristotelischen Physik.* In Seek (1975), 261-300.

Wunderling, H. (2007): *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2007.